UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION VIBRATOIRE EN FLEXION DE POUTRES COMPOSITES MULTICOUCHES À SECTION CREUSE SUITE À UN IMPACT

SAMY GERONYMOS

DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE MÉCANIQUE)

AVRIL 2014

© Samy Geronymos, 2014.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION VIBRATOIRE EN FLEXION DE POUTRES COMPOSITES MULTICOUCHES À SECTION CREUSE SUITE À UN IMPACT

présenté par : GERONYMOS Samy

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Mme BROCHU Myram, Ph.D., présidente

Mme ROSS Annie, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire en particulier à mes parents. Ils ont toujours pris soin pour que mon grand frère et moi ne manquions de rien d'essentiel, même lors des temps difficiles qui ont obligé ma famille à se séparer pour une certaine période de temps. Merci de toujours m'avoir fait confiance et m'avoir encouragé à entreprendre mes projets un peu fous! Ma présence à Montréal en est la preuve. J'espère qu'ils sont tout aussi fiers de moi que je suis fier d'eux et je les aime malgré la distance.

Mes pensées sont également avec mon grand frère avec qui on ne s'est pas toujours entendu, mais qui est devenu l'un de mes meilleurs conseillers. On a des visions différentes lui et moi. Il s'agit de la personne la plus difficile à convaincre! Mais quand j'y arrive je me dis que j'ai fait du bon boulot!

Je remercie ma famille élargie de m'avoir toujours traité comme un fils et je croise les doigts pour que ma grand-mère devienne championne de tennis!

Je suis très chanceux d'avoir des amis véritables dans plusieurs pays. Je suis convaincu qu'ils seront toujours disponibles et toujours heureux de me revoir même si l'on ne s'est pas revu pendant de grandes périodes de temps. Ma vie ne serait pas la même sans eux.

Comment oublier la mission POLYMONDE 2013 – AUSTRALIE? Impossible. Merci à l'équipe et merci Thierry. Vous m'avez fait vivre des moments inoubliables et j'ai ouvert les yeux à de nouvelles connaissances et à une nouvelle manière de penser, qui me sera fort utile, j'en suis convaincu.

Pour finir, je dédie aussi ce texte à Priscille. Je ne serais pas devenu l'homme que je suis aujourd'hui sans elle.

J'espère que mon futur sera aussi doux que le sirop d'érable du Québec.

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord, Annie Ross de sa confiance et de m'avoir accueilli dans son groupe de recherche, où j'ai rencontré des personnes exceptionnelles, toujours prêtes à donner un coup de main. Je pense notamment à Isabelle, Bénédict et Jeanne du département de génie mécanique. Son approche amicale a été particulièrement appréciée.

Merci à Mme Brochu et M. Lakis d'avoir accepté de faire partie du jury de délibération lors de la défense de ce projet de recherche.

Merci à Roland Edith Fotsing de nous avoir épaulés mon stagiaire et moi et d'avoir pris le temps nécessaire pour nous transmettre ses connaissances et d'avoir partagé son avis sur diverses problématiques.

À mes amis du département de génie mécanique, de la cave et en dehors : François, Jean-Michel, Masoud, Constant, Etienne, Paul, Marion, Elsa. Ce fut deux belles années! Merci pour les beaux moments que vous m'avez procuré.

RÉSUMÉ

Le sujet de cette recherche porte sur la modélisation analytique des vibrations transversales de poutres en composites multicouches à section creuse. La méthode énergétique des modes assumés a été choisie à cet effet, contrairement aux travaux d'autres auteurs. L'objectif de cette méthode est de calculer les fréquences propres ainsi que le comportement transitoire de poutres grâce à des fonctions admissibles, et ce, de manière très efficace. Le comportement transitoire suite à des impacts n'a pas beaucoup été étudié dans la littérature trouvée par l'auteur. La logique derrière cette méthode est de calculer les solutions d'un problème complexe grâce aux fonctions modales d'un problème simplifié. Le taux de convergence élevé ainsi que la possibilité de visualiser le cisaillement le long des poutres à n'importe quel instant sont des avantages précieux par rapport aux autres méthodes numériques. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle permet d'associer des fonctions modales aux fréquences propres calculées. Cette méthode a été utilisée dans cette étude pour calculer le problème de poutres composites multicouches, grâce aux fonctions modales des problèmes homogénéisés correspondants. Les fréquences propres ont été obtenues grâce au problème aux valeurs propres découlant des relations des énergies potentielle, cinétique et de l'énergie des chargements externes. Le comportement transitoire des poutres est obtenu en découplant le même système matriciel obtenu lors du problème aux valeurs propres et en le résolvant. La validation de cette méthode a été réalisée grâce à des poutres pleines ou creuses, isotropes ou orthotropes dont les détails sont principalement fournis en annexe. Les résultats principaux de cette recherche sont une analyse de sensibilité des fréquences propres en fonction du module de cisaillement transversal et une étude paramétrique de la séquence d'empilement des poutres creuses en composites. Cette méthode ouvre de nombreuses possibilités de recherche futures entre autre sur les vibrations couplées et les nano poutres en carbone. En effet, en possédant les expressions des énergies et en y injectant les fonctions modales représentant le problème il est théoriquement possible de résoudre une grande variété de problèmes.

ABSTRACT

The subject of this research is the study of transverse vibration of multi-layered composite hollow beams using an analytical method. The assumed modes method was chosen to this effect, in contrast with the other authors' work. The objective of this method is to efficiently calculate the modal frequencies and the transient vibration response of the studied beams by using modal functions. To the author's knowledge, only few of the research work presented in the literature review focus on the transient response. The choice of the modal functions used to resolve the problem is straightforward. The modal functions of a simplified problem are used in order to resolve the initial problem. There are some advantages to using this method, namely high convergence rates and the ability to visualize shear at any location on the beam and at any moment. The ability to associate any given modal frequency to a modal function is also an advantage. In this research the modal functions chosen to resolve the multi-layered composite beam problem were the modal functions of the homogenized beam. The modal frequencies are calculated by resolving the eigen value problem derived from the energy expressions. On the other hand the transient response is obtained by decoupling the system of equations for the forced problem and resolving the decoupled equations. Some non-hollow or hollow, isotropic or orthotropic beams were used in order to validate the theoretical results. The main results of the research are a sensitivity analysis function of the value of the transverse shear modulus as well as a parametric study function of the stacking sequence. This research opens the door for exciting new subjects, namely coupled vibration as well as nano-beams. It is theoretically possible to resolve a great variety of problems with this method depends on the energy expressions and needs adequate modal functions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE III

REMERCIEMENTS IV

RÉSUMÉ V

ABSTRACT VI

TABLE DES MATIÈRES VII

LISTE DES TABLEAUX XI

LISTE DES FIGURES XIV

LISTE DES ANNEXES XX

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS XXIII

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 4

1.1 Poutres 4

1.1.1 Matériaux isotropes 4

1.1.2 Matériaux composites et « FGM » 10

1.2 Plaques et coques 11

1.2.1 Matériaux isotropes 11

1.2.2 Matériaux composites et « FGM » 12

CHAPITRE 2 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE 14

CHAPITRE 3 THÉORIE CLASSIQUE DES STRATIFIÉS ET DES POUTRES 16

3.1 Cadre de validité du modèle développé 16

3.2 Généralités 17

3.3 Définition du cisaillement 21

3.4 Matrices de souplesse dans des axes non-principaux 23

3.5 Coefficients de Poisson dans les axes non principaux 28
3.6 Couplages vibratoires 29
3.7 Simplifications pour les poutres 29
3.8 Théories de poutres 31
3.8.1 Théorie de Euler-Bernoulli 31
3.8.2 Poutre de cisaillement et de Timoshenko 33
3.8.3 Dimensionnalisation des fonctions modales 44
CHAPITRE 4 MÉTHODE DES MODES ASSUMÉS 46
4.1 Généralités 46
4.2 Expressions des énergies 47
4.2.1 Euler Bernoulli 47
4.2.2 Rayleigh 48
4.2.3 Timoshenko 48
4.3 Résolution des équations matricielles 48
4.4 Validation de la méthode 51
CHAPITRE 5 PARTIE EXPÉRIMENTALE 53
5.1 Banc d'essais 53
5.2 Les impacts 54
5.2.1 Impacts expérimentaux 54
5.2.2 Impacts théoriques 58
5.3 Construction des poutres 62
5.4 Poutres construites 66
5.4.1 Mesures géométriques des poutres fabriquées 67
5.4.2 État des poutres 70

5.5 Essais vibratoires 71

5.5.1 Répétabilité des essais sur la première fréquence propre– Influence du moment de serrage 72

5.5.2 Répétabilité des essais sur toute la gamme de fréquences 74

5.5.3 Comparaison des trois poutres fabriquées 76

5.5.4 Conclusion 78

CHAPITRE 6 CAS PARTICULIERS ÉTUDIÉS 79

6.1 Généralités 79

6.2 Matrices de souplesse 80

6.3 Étude de convergence du cas 1 et du cas 2 89

6.3.1 Cas 1 89

6.3.2 Cas 2 91

6.4 Comparaison entre les résultats approximatifs et les résultats du banc d'essais 93

6.4.1 Poutre 1 94

6.4.2 Poutre 2 95

6.4.3 Poutre 3 96

6.5 Conclusions 96

CHAPITRE 7 ANALYSE DE SENSIBILITÉ 98

7.1 Conclusions 102

CHAPITRE 8 ANALYSE PARAMÉTRIQUE DE LA SÉQUENCE D'EMPILEMENT 104

8.1 Généralités 104

8.2 Analyse paramétrique 105

8.2.1 Remplacement d'une couche à 0°/90° avec une couche à ±45° - Première analyse 106

8.2.2 Remplacement d'une couche à 0°/90° avec une couche à ±45° - Deuxième analyse 111

8.2.3 Comportement transitoire des 16 séquences d'empilement 113
8.3 Comparaison avec la littérature 122
8.4 Conclusions 122
CHAPITRE 9 AMÉLIORATIONS FUTURES 124
9.1 Améliorations théoriques 124
9.2 Améliorations expérimentales 125
CHAPITRE 10 CONCLUSIONS 127
BIBLIOGRAPHIE 129
ANNEXES 136

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Récapitulatif des matrices de souplesse 25

Tableau 5.1 : Terminologie de la Figure 5-2 55

Tableau 5.2 : Propriétés des couches pré-imprégnées 67

Tableau 5.3 : Mesures géométriques des trois poutres fabriquées 69

Tableau 5.4 : Mesures géométriques des trois poutres fabriquées utilisés dans les calculs 70

Tableau 5.5 : Erreur expérimentale causée par les sections creuses et les surfaces non-planes (Tableau vi. 24) 72

Tableau 5.6 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 1 78

Tableau 6.1 : Caractéristiques des couches pré-imprégnées (4 plis) – Tableau complété 86

Tableau 6.2 : Modules de rigidité pour les couches horizontales et verticales et pour les deux orientations de fibres 88

Tableau 6.3 : Résumé des cas étudiés 89

Tableau 6.4 : Étude de convergence pour la poutre 1 grâce à Euler-Bernoulli [Hz] 91

Tableau 6.5 : Étude de convergence en fréquence pour la poutre 1 grâce à Timoshenko 93

Tableau 6.6 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 1 94

Tableau 6.7 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 2 95

Tableau 6.8 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 3 96

Tableau 8.1 : Modules de rigidité pour les couches horizontales et verticales et pour les deux orientations de fibres (Tableau 6.2) 105

Tableau 8.2 : Numérotation des séquences d'empilement 106

Tableau 8.3 : Fréquences propres approximatives de 6 empilements différents 107

Tableau 8.4 : Effet de l'ajout d'une couche ±45° sous-jacente sur les fréquences propres 112

Tableau i. 1 : Caractéristiques de la poutre aluminium.....167

Tableau iii. 1: 4 cas à simuler.....178

Tableau iii. 2 : Fréquences propres expérimentales de la poutre pleine d'aluminium 2024 T4 ..178

Tableau iii. 3 : Comparaison des fréquences propres analytiques avec les fréquences propres expérimentales.....179

Tableau iii. 4 : Résultats de simulation du cas 1 179

Tableau iii. 5 : Résultats de simulation du cas 2 180

Tableau iii. 6 : Résultats de simulation du cas 3 180

Tableau iii. 7 : Résultats de simulation du cas 4 181

Tableau vi. 1: Caractéristiques de la poutre de (Han et al., 1999) 190

Tableau vi. 2 : Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009) 191

Tableau vi. 3: Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009).....191

Tableau vi. 4 : Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009) 192

Tableau vi. 5 : Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009).....192

Tableau vi. 6 : Comparaison des résultats pour la poutre de (Han et al., 1999) 193

Tableau vi. 7 : Comparaison des résultats pour la poutre mince de (Majkut, 2009).....194

Tableau vi. 8 : Comparaison des résultats pour la poutre épaisse de (Majkut, 2009).....195

Tableau vi. 9: Propriétés de l'aluminium 2024 T4.....198

Tableau vi. 10 : Propriétés spécifiques à la poutre 1.....198

Tableau vi. 11 : Caractéristiques géométriques de la poutre 1 [m].....198

Tableau vi. 12 : Propriétés de l'acier 1018.....199

Tableau vi. 13 : Propriétés spécifiques à la poutre 2.....199

Tableau vi. 14 : Caractéristiques géométriques de la poutre 2 [m].....200

Tableau vi. 15 : Propriétés spécifiques à la poutre 3.....200

Tableau vi. 16 : Caractéristiques géométriques de la poutre 3 [m].....201

Tableau vi. 17 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 1 202

Tableau vi. 18 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 2 207

Tableau vi. 19 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3 212

Tableau vi. 20 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3 214

Tableau vi. 21 : Comparaison du des fréquences analytiques entre le cas classique et le cas 3 ..221

Tableau vi. 22 : Comparaison du cas 2 et du cas 3 du cas classique.....222

Tableau vi. 23 : Étude de convergence du cas 3 en fonction du nombre de modes.....223

Tableau vi. 24 : Erreur causée par les sections creuses et les surfaces non-planes.....227

Tableau vi. 25 : Erreur causée par les sections creuses uniquement.....228

Tableau vii. 1: Nombres d'onde d'une poutre d'Euler-Bernoulli pour des conditions aux limites classiques (Leissa, 2011).....234

Tableau xi. 1 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 1 261

Tableau xi. 2 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 2 263

Tableau xi. 3 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 3 265

LISTE DES FIGURES

Figure 3-1: Définition des axes sur un stratifié 17

Figure 3-2 : Illustration des angles positifs 17

Figure 3-3 : Orientation des contraintes positives sur les faces d'un élément infinitésimal 17

Figure 3-4 : Illustration de la contrainte de la déformation de cisaillement 22

Figure 3-5 : Représentation du repère global de la poutre (x, y, z) et du repère local (x', y', z') .. 24

Figure 3-6 : Couches horizontales et verticales avec deux orientations de fibres possibles 25

Figure 3-7 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de cisaillement 37

Figure 3-8 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a * < ac *$ 43

Figure 3-9 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a * > ac *$ 43

Figure 4-1 : Homogénéisation de la section d'une poutre 51

Figure 5-1 : Banc d'essais avec poutre une poutre montée 53

Figure 5-2 : Spécifications des embouts du marteau instrumenté ("PCB Model 086C01," n.d.) .. 55

Figure 5-3 : Courbes d'impacts avec l'embout rouge pour plusieurs vitesses d'impact 56

Figure 5-4 : Courbes d'impacts avec l'embout noir pour plusieurs vitesses d'impact 57

Figure 5-5 : Courbes d'impacts avec l'embout blanc pour plusieurs vitesses d'impact 57

Figure 5-6 : Courbes d'impacts avec l'embout en acier inoxydable pour plusieurs vitesses d'impact 58

Figure 5-7 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable 59

Figure 5-8 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable traitée à lisser 60

Figure 5-9 : Lissage de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable, interpolée grâce à des séries de Fourrier 60

Figure 5-10 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable grâce à une série de Fourrier....61

Figure 5-11 : Première partie du mandrin....62

Figure 5-12 : Deuxième partie du mandrin....63

Figure 5-13 : Troisième partie du mandrin....63

Figure 5-14 : Procédure de désolidarisation du mandrin....63

Figure 5-15 : (a) Segment de résine chargée avant meulage; (b) Moule pour cuisson de la résine chargée. 64

Figure 5-16 : Schémas de fabrication des poutres en composites à section creuse....65

Figure 5-17 : Contre-moule en bois....65

Figure 5-18 : Coupe du contre-moule en bois (Marchal, 2013)....66

Figure 5-19 : Poutres en composites fabriquées....66

Figure 5-20 : Section d'une poutre en composite avec séquence d'empilement....67

Figure 5-21 : (a) Illustration des prises de mesure externes; (b) Illustration des prises de mesure de la section....68

Figure 5-22 : Défauts de section des poutres fabriquées....71

Figure 5-23 : Spectre fréquentiel pour les essais de répétabilité....73

Figure 5-24 : Agrandissement de la Figure 5-23....73

Figure 5-25 : Contenu fréquentiel de la poutre 1....75

Figure 5-26 : Agrandissement de la Figure 5-25....75

Figure 5-27 : Agrandissement de la Figure 5-25....76

Figure 5-28 : Comparaison des spectres fréquentiels de trois poutres....76

Figure 5-29 : Agrandissement de la Figure 5-28....77

Figure 5-30 : Agrandissement de la Figure 5-28....77

Figure 6-1 : Couches horizontales et verticales avec deux orientations de fibres possibles (Figure 3-6) 79

Figure 7-1 : Fréquences propres expérimentales et théoriques pour plusieurs modules de cisaillement.....99

Figure 7-2 : Détermination graphique du module de cisaillement transversal 100

Figure 7-3 : Fréquences propres en fonction de $G1,3$ pour chaque mode.....101

Figure 7-4 : Pente des fréquences propres en fonction de $G1,3$.....102

Figure 8-1 : Passage d'une configuration 0/0/0/0 à une configuration 45/0/0/0 : (a) changement d'orientation de la première couche, (b) changement du module de rigidité longitudinal de la première couche, (c) changement du module de cisaillement transversal de la première couche.....110

Figure 8-2 : Rapport des fréquences propres lors du remplacement d'une couche à $0°\backslash 90°$ avec une couche à $\pm 45°$ pour les 5 premiers modes.....111

Figure 8-3 : Courbe d'impact.....113

Figure 8-4 : Déplacement en fonction du temps du point $x = 34L$ et écarts pour toutes les séquences d'empilement : (a) déplacement transversal; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).....115

Figure 8-5 : Angle de flexion, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = 34L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) angle de flexion; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a) 116

Figure 8-6 : Angle de cisaillement, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = 34L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) angle de cisaillement; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).....117

Figure 8-7 : Cisaillement le long de la poutre 0/0/0/0 pour l'instant t=0.010118s 118

Figure 8-8 : Vitesses, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = 34L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) vitesse; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).....119

Figure 8-9 : Accélérations, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = 34L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) accélération; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a). 121

Figure i- 1: Représentation du repère global de la poutre (x, y, z) et du repère local (x', y', z') 136

Figure i- 2: Définition des hauteurs h 143

Figure i- 3 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de cisaillement 158

Figure i- 4 :Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a * < ac *$.....164

Figure i- 5 :Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a * > ac *$.....165

Figure i- 6 : (a) Fonctions modales classiques, (b) Fonctions modales manipulées 167

Figure vi- 1: Géométrie de la poutre 1 199

Figure vi- 2 : Géométrie de la poutre 2 200

Figure vi- 3 : Géométrie de la poutre 3 201

Figure vi- 4 : Alésages de la poutre 3.....201

Figure vi- 5:Fréquences propres expérimentales de la poutre 1.....203

Figure vi- 6 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse 204

Figure vi- 7 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de flexion 205

Figure vi- 8 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko 206

Figure vi- 9 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 2.....208

Figure vi- 10 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse 209

Figure vi- 11 : Comparaison de la dixième fonction modale de déplacement transverse.....210

Figure vi- 12 : Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko 210

Figure vi- 13 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko 211

Figure vi- 14 : Dixième fonction modale de cisaillement pour la théorie de Timoshenko.....212

Figure vi- 15 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 3.....213

Figure vi- 16 : Agrandissement des fréquences propres expérimentales de la poutre 3 214

Figure vi- 17 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse 215

Figure vi- 18 : Comparaison de la dixième fonction modale de déplacement transverse.....216

Figure vi- 19 : Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko 216

Figure vi- 20 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko 217

Figure vi- 21 : Dixième fonction modale de cisaillement de Timoshenko 218

Figure vi- 22 : Équivalence des deux sections de poutre pour un matériau homogène et isotrope 219

Figure vi- 23: Méthode de calcul classique pour une poutre homogène et isotrope 220

Figure vi- 24 : Cas de calcul 2.....220

Figure vi- 25 : Cas de calcul 3.....221

Figure vi- 26 : Cas de calcul 4.....225

Figure vi- 27 : Validation du code avec matériaux homogène pour des sections pleines et des sections creuses 226

Figure vii- 1: Essais répétabilité de la poutre 1 avec moment de serrage de $20\ lb.in$ 230

Figure vii- 2 : Élargissement de la Figure vii- 1 230

Figure vii- 3 : Arrête déformée de la poutre 1 lors du montage.....231

Figure vii- 4 : Essais de répétabilité pour moment de serrage de $\boldsymbol{40\ lb * in}$ 231

Figure vii- 5 : Agrandissement de la Figure vii- 4 232

Figure vii- 6 : Comparaison des spectres pour les deux moments de serrage.....232

Figure vii- 7 : Agrandissement de la Figure vii- 6 233

Figure vii- 8 : Agrandissement de la Figure vii- 6 233

Figure vii- 9 : Effet de l'embout du marteau instrumenté sur les spectres fréquentiels.....235

Figure vii- 10 : Agrandissement de la Figure vii- 9.....235

Figure vii- 11 : Position de frappe moyenne.....236

Figure vii- 12 : Effet de la position de frappe sur le spectre fréquentiel.....237

Figure vii- 13 : Illustration des forces d'impact.....238

Figure vii- 14 : Influence de la force d'impact sur les spectres fréquentiels.....238

Figure vii- 15 : Agrandissement de la Figure vii- 14.....239

Figure xi- 1 : Courbe d'impact avec embout noir à approcher.....255

Figure xi- 2 : Lissage de la courbe d'impact avec l'embout noir avec des séries de Fourrier.....255

Figure xi- 3 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout noir.....256

Figure xi- 4 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable.....256

Figure xi- 5 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable traitée à lisser.....257

Figure xi- 6 : Lissages de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable lissée grâce à des séries de Fourrier.....257

Figure xi- 7 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable grâce à une série de Fourrier.....258

Figure xi- 8 : Contenu fréquentiel de la poutre 1.....260

Figure xi- 9 : Agrandissement de la Figure xi- 8.....260

Figure xi- 10 : Agrandissement de la Figure xi- 8.....260

Figure xi- 11 : Spectre fréquentiel de la poutre 2.....261

Figure xi- 12 : Agrandissement de la Figure xi- 11.....262

Figure xi- 13 : Agrandissement de la Figure xi- 11.....262

Figure xi- 14 : Spectre fréquentiel de la poutre 3.....263

Figure xi- 15 : Agrandissement de la Figure xi- 14.....264

Figure xi- 16 : Agrandissement de la Figure xi- 14.....264

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I. DÉTAILS DE LA THÉORIE DU CHAPITRE 3 136

I.1. Matrices de souplesse dans des axes non-principaux 136

I.1.1. Matrice de souplesse dans des axes non-principaux par rotation dans le même plan 136

I.1.2. Matrice de souplesse dans des axes non-principaux par rotation dans un plan autre que celui des directions principales 141

I.2. Équation constitutive et couplages vibratoires 142

I.3. Théories des poutres 146

I.3.1. Poutre d'Euler-Bernoulli 147

I.3.2. Poutre de cisaillement et de Timoshenko 153

ANNEXE II. DÉTAILS DE LA THÉORIE DU CHAPITRE 4 169

ANNEXE III. PREUVE THÉORIQUE SIMPLIFICATRICE SUR CONTRAINTES ET DÉPLACEMENTS TRANSVERSES POUR LES THÉORIES DES POUTRES 174

III.1. Conclusions 181

ANNEXE IV. ISOLATION DU NOMBRE D'ONDE DE TIMOSHENKO 182

ANNEXE V. MANIPULATION DES FONCTIONS MODALES DE TIMOSHENKO 186

V.1. Expressions classiques 186

V.2. Expressions manipulées 188

ANNEXE VI. VALIDATION DES RÉSULTATS THÉORIQUES 190

VI.1. Validation avec résultats de la littérature 190

VI.1.1. Comparaison des fréquences propres avec la littérature 190

VI.1.2. Orthogonalité des fonctions modales 195

VI.2. Validation de la méthode des modes assumés 197

VI.2.1. Caractéristiques des poutres 198

VI.2.2. Fréquences propres calculées 201

VI.2.3. Deuxième partie de la validation de la méthode des modes assumés 219

VI.3. Conclusions de l'annexe 225

ANNEXE VII. MÉTHODOLOGIE POUR PRODUIRE UN SPECTRE FRÉQUENTIEL EXPÉRIMENTAL ÉQUILIBRÉ 229

VII.1. Effet du moment de serrage des vis sur le spectre fréquentiel 229

VII.1.1. Serrage à 20 lb*in 229

VII.2. Comparaison serrage 20 lb*in et 40 lb*in 232

VII.2.1. Comparaison 233

VII.3. Effet du type d'embout 234

VII.3.1. Comparaison 235

VII.4. Effet de la hauteur de frappe 236

VII.4.1. Comparaison 237

VII.5. Effet de la force d'impact 237

VII.5.1. Comparaison 239

VII.6. Conclusion 239

ANNEXE VIII. ROTATION DES REPÈRES D'UN STRATIFIÉ 240

ANNEXE IX. CALCUL DU FACTEUR DE FORME 247

ANNEXE X. FAIBLESSES DE MAPLE 251

ANNEXE XI. DÉTAILS CHAPITRE 5 253

XI.1. Détails sur courbes d'impacts théoriques 253

XI.1.1. Impact avec Dirac temporel 253

XI.1.2. Impact avec fonctions continues temporelles 253

XI.1.3. Manière d'utiliser les techniques de lissage 258

XI.2. Répétabilité des essais des trois poutres en composites 259

XI.2.1. Poutre 1 260

XI.2.2. Poutre 2 261

XI.2.3. Poutre 3 263

XI.2.4. Conclusion.....265

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

A	Aire de section, $[m^2]$
A^*	Aire de section adimensionnelle = $\frac{A}{L^2}$
$a, b, \tilde{b}$	Nombres d'onde, $\left[\frac{1}{m}\right]$
$a^*, b^*, \widetilde{b^*}$	Nombres d'onde adimensionnels = $a * L, b * L, \tilde{b} * L$
E	Modules de Young, $[Pa]$
f^*	Excitation externe adimensionnelle $= \frac{f*L^3}{E*I}$
G	Modules de cisaillement, $[Pa]$
G^*	Module de cisaillement adimensionnel = $\frac{G*L^4}{E*I}$
I	Second moment de surface, $[m^4]$
I^*	Second moment de surface adimensionnel = $\frac{I}{L^{*4}}$
k'	Facteur de forme de cisaillement
k^*	Rayon de giration =$\frac{1}{s^*}$
L	Longueur de la poutre, $[m]$
s^*	Coefficient d'élancement =$L * \sqrt{\frac{A}{I}} = \frac{1}{k^*}$
u	Déplacement selon l'axe longitudinal « x », $[m]$
v	Déplacement selon l'axe transversal « y », $[m]$
w	Déplacement selon l'axe transversal « z », $[m]$

x, y, z	Coordonnées cartésiennes, $[m]$
γ	Déformation angulaire de cisaillement, $[rad]$
γ^*	$=\sqrt{\frac{E}{k'G}}$
ϵ	Déformations axiales
ν	Coefficient de Poisson
ξ	Coordonnée cartésienne adimensionnelle = $\left[\frac{x}{L}\right]$
ρ	Masse volumique, $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
ρ^*	Masse volumique adimensionnelle = $\frac{\rho * L^6 * \omega_1^2}{E * I}$
σ	Contrainte axiale, $[Pa]$
τ	Contrainte de cisaillement, $[Pa]$
ϕ	Angle dû à un moment de flexion, $[rad]$

INTRODUCTION

Avec l'avènement des matériaux composites, les industries se transforment et innovent avec la création de nouveaux produits, possédant des caractéristiques très intéressantes, tant au niveau de la rigidité qu'au niveau de la masse volumique, de la conductivité électrique etc.

Un matériau composite est composé d'au moins deux matériaux non-miscibles. L'objectif est de pouvoir utiliser les propriétés de chaque matériau à leur maximum et d'obtenir un mélange qui est plus performant qu'un matériau traditionnel homogène. Les matériaux composites fabriqués avec des fibres de verre ou de carbone avec une matrice en époxy sont très communs dans l'industrie aéronautique et spatiale où le poids est un paramètre critique. Ils sont également utilisés dans l'industrie du sport et de la haute performance de plus en plus, dans les voiliers de compétition par exemple. En effet, les fibres de carbone par exemple, possèdent un quotient résistance en tension sur poids et un quotient module de rigidité sur poids plus élevé que l'acier et l'aluminium et ceci les rends très intéressants à utiliser.

Cependant, avec ces nouveaux matériaux, des nouveaux processus de fabrication ainsi que des théories plus poussées doivent être développés et mis en œuvre afin de mieux comprendre le comportement de ces structures fabriquées. En effet, une des problématiques des matériaux composites dans l'industrie se pose dans la conception des véhicules. Les matériaux composites utilisés sont plus légers que les aciers utilisés présentement et présentent donc un comportement dynamique différent de ces derniers. Le comportement dynamique est d'autant plus compliqué que les matériaux composites sont des matériaux orthotropes, ou même anisotrope, dont les équations du mouvement sont plus complexes que celles pour des matériaux isotropes, tel que l'aluminium. Mieux comprendre le comportement vibratoire d'une poutre mènera à une meilleure conception pour éviter que les structures conçues n'entrent en résonance et ne subissent des dommages. De plus, l'influence de différents paramètres sur le comportement vibratoire, tels que la section et la longueur de la poutre ainsi que les matériaux utilisés, seront mieux compris. L'optimisation de la conception peut se traduire, par exemple, par une réduction du poids ou une augmentation de la rigidité et même d'une amélioration de l'amortissement vibratoire. Le poids est un critère important dans les structures de véhicules. En réussissant à réduire le poids il est généralement possible de réduire la consommation en carburant du véhicule. Cependant, en allégeant une structure on l'affaibli. L'amélioration de l'amortissement vibratoire est un sujet

important dans le domaine aéronautique pour le confort des passagers par exemple (Horel, 2013). Un modèle dynamique capable de simuler le comportement dynamique est nécessaire pour s'assurer que l'optimisation est bien réalisée.

Pour qu'une structure puisse être qualifiée de poutre, il faut qu'une de ses dimensions soit beaucoup plus grande que les autres. Il s'agit typiquement d'un facteur d'au moins 10. Une poutre à section creuse est une poutre dont la section est une courbe fermée. Dans cadre de cette recherche des sections rectangulaires ont été étudiées. Le choix d'une section rectangulaire, permet d'avoir des parois droites et donc d'utiliser les coordonnées cartésiennes et faciliter la modélisation théorique.

Cette recherche a été entreprise afin de développer les connaissances et les compétences en matière de comportement vibratoire des poutres en composites. L'objectif de cette recherche est donc de mieux comprendre le comportement des matériaux composites lorsque ceux-ci sont utilisés pour fabriquer des poutres creuses. Dans le présent travail, le logiciel Maple a été utilisé pour écrire le code principal et également MATLAB pour certaines fonctions de calcul itératif.

Un des objectifs de cette recherche est de construire un programme qui puisse calculer avec précision les fréquences propres et les vibrations transitoires des poutres en composites, à section creuse multicouche qui ne présentent pas de couplages vibratoires. L'intérêt premier de cette recherche se porte sur les vibrations transverses transitoires en flexion, mais le logiciel a été développé de manière telle qu'il sera relativement facile de prendre en compte d'autres types de vibration dans le futur tel que les vibrations longitudinales et en torsion. Les effets des couplages vibratoires ne sont pas étudiés dans cette recherche. Il est possible de simuler n'importe quel type de chargement tel que les impacts, des chargements périodiques et non périodiques. Ceci présente un grand intérêt puisque la réponse des matériaux composites suite à un impact est un sujet d'actualité avec l'industrie utilisant de plus en plus les matériaux composites dans les équipements de sport mais également dans les véhicules. Suite à la méthode développée dans le cadre de cette recherche il sera possible d'approfondir d'autres sujets plus complexes tel que les vibrations couplées, mais également se diversifier pour étudier les vibrations des nanopoutres. En effet, il existe un grand intérêt à étudier les nanopoutres puisqu'elles sont utilisées dans un nombre croissant d'applications. Les nanotubes en carbone, par exemple, sont utilisés dans le développement d'instruments tels que des actuateurs, des résonateurs à haute fréquence, des

senseurs dans les antennes de télécommunication. Il existe aussi des applications dans le domaine médical pour le traitement du cancer (Ronald F. Gibson, 2007)

La revue de littérature est composée dans le premier chapitre. Le deuxième chapitre du texte définit l'ensemble des objectifs et la méthodologie. Les deux chapitres suivants sont consacrés aux théories utilisées dans le cadre de cette recherche. Le cinquième chapitre expose les considérations expérimentales en introduisant les équipements et les méthodes utilisées pour produire des spectres fréquentielles suite à des impacts pour une variété de poutres. Le sixième chapitre compare les résultats théoriques et expérimentaux pour des poutres en composites fabriquées afin de s'assurer que la théorie et la pratique sont en accord. Le septième et huitième chapitre pousse l'analyse plus loin grâce à une étude de sensibilité et une étude paramétrique respectivement. Pour finir, dans les deux derniers chapitres, les conclusions et des recommandations pour les travaux futurs sont données. Les chapitres mentionnés ci-dessous ne traitent que des éléments ayant un lien direct avec les poutres en composites à section creuse, mais il existe un nombre important d'annexes qui traitent des étapes de validation du code ainsi que des détails importants des théories fondamentales. Ce choix a été fait pour permettre une lecture fluide du sujet principal.

CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Les poutres sont des éléments structuraux très répandus dans le domaine de l'ingénierie. De plus, l'utilisation croissante des matériaux composites, entre autre dans le domaine des transports pour réduire le poids, a stimulé beaucoup de recherches sur les vibrations des poutres en composite à sections pleines, à sections creuses, les nano-poutres etc.

Cette revue bibliographique balaye un grand nombre de sujets différents. La structure de la revue est en plusieurs niveaux, afin de bien catégoriser tous les articles cités. Chaque niveau et sous-niveau est composé de deux catégories.

- Niveau 1 : Poutres, plaques/coques
- Niveau 2 : Matériaux isotropes, matériaux composites/« Functionally Graded Materials (FGM) »

Le présent chapitre vise à dresser le portrait général de l'état de l'art dans la modélisation de structures vibrantes de base (i.e. poutres, plaques et coques). Le but est d'établir le savoir-faire et les lacunes actuelles afin de poser au Chapitre 2 les objectifs spécifiques et la méthodologie utilisée dans ce travail. Les notions et définitions auxquelles la revue de littérature fait référence sont explicitées dans le Chapitre 3 et le Chapitre 4 pour permettre une lecture plus fluide et pour introduire les différents éléments lorsque le besoin survient dans le texte principal.

1.1 Poutres

1.1.1 Matériaux isotropes

(Amabili & Garziera, 1999) se sont concentrés sur une technique qui permet de résoudre des problèmes de poutres ayant des supports rigides et des masses ponctuelles. Ces problèmes sont généralement difficiles à solutionner. Cette technique utilise les solutions de problèmes plus simples avec des supports élastiques à la place des supports rigides et sans masses ponctuelles. Le problème est résolu grâce à la méthode de Rayleigh-Ritz. Dans celle-ci les fonctions modales de problèmes simples sont utilisées pour la résolution de problèmes plus complexes. La méthode de Rayleigh-Ritz permet de calculer les fréquences propres et les fonctions modales de certains problèmes complexes en partant des expressions des énergies. Il faut jusqu'à 100 termes pour

atteindre la convergence. Cependant, l'effort de calcul fourni pour la résolution des systèmes matriciel est faible selon les auteurs. Cette méthode n'a pas été utilisée dans cet article pour calculer la réponse transitoire suite à un impact.

(Han, Benaroya, & Wei, 1999) ont comparé les 4 théories les plus utilisées en ce qui concerne les vibrations transverses. Plus précisément, les modèles adimensionnels des poutres d'Euler-Bernoulli, de Rayleigh, de la poutre de cisaillement et de Timoshenko ont été redéveloppés et résolus grâce au principe de Hamilton pour des vibrations libres et forcées pour des conditions aux limites variées. La différence entre le modèle de Rayleigh par rapport à celui d'Euler-Bernoulli est qu'il prend en compte l'inertie de rotation, le modèle de la poutre en cisaillement rend en compte le cisaillement transversal et le modèle de Timoshenko prend en compte les deux. Les hypothèses de base de ces théories sont que l'effet Poisson est négligé et que les sections des poutres étudiées possèdent deux axes de symétrie. Ce dernier est le modèle le plus précis des quatre énoncés. Les auteurs ont déterminé que lorsque le coefficient d'élancement (« slenderness ratio ») est supérieur à 100 le modèle d'Euler-Bernoulli convient bien pour les calculs. Sinon, les modèles de Timoshenko ou de la poutre de cisaillement devraient être préférés. Le coefficient de minceur est défini par le produit de la longueur de la poutre et la racine du quotient entre le second moment de surface et l'aire de la section de la poutre. Le modèle de Timoshenko devra être utilisé dans le cadre de cette recherche puisque les poutres étudiées possèdent un coefficient de minceur plus faible que 100. (van Rensburg & van der Merwe, 2006) se sont également penché sur la résolution analytique des équations adimensionnalisées des poutres de Timoshenko simplement supportées et encastrées-libres. L'adimensionnalisation de ces équations a été effectuée directement à partir des équations de Timoshenko plutôt que dans les expressions des énergies potentielle et cinétique comme cela a été fait dans l'article de (Han et al., 1999). L'adimensionnalisation des équations permet de trouver des solutions pour n'importe quelle poutre et de comparer ces dernières entre elles avec facilité.

Dans la théorie, les fonctions modales calculées sont toujours orthogonales entre elles. Les fonctions modales représentent les déformations associées aux fréquences propres calculées grâce au problème aux valeurs propres étudiées. Cependant, en pratique, lorsque ces fonctions modales sont implémentées sur un ordinateur des erreurs de nature numérique apparaissent pour les modes élevés. Cela peut causer des problèmes et il existe deux moyens pour y remédier. Le premier consiste à travailler avec un logiciel qui permet à l'utilisateur de choisir le nombre de chiffres

derrière une virgule flottante. La deuxième solution, consiste à manipuler expressions des formes modales pour faire disparaître les « points chauds » numériques en faisant disparaitre la soustraction des termes hyperboliques dans les expressions des fonctions modales. C'est l'approche qu'ont choisi plusieurs auteurs tels que (Tang, 2003; Leung, 1988, 1990; Gonçalves, Brennan, & Elliott, 2007). Ces techniques n'avaient pas encore été appliquées sur la théorie des poutres de Timoshenko jusqu'à présent.

La théorie des poutres de Timoshenko est décrite par deux équations qui possèdent deux degrés de liberté, soit, le déplacement transverse et l'angle de flexion. Les fonctions modales permettent de trouver la solution de ces équations lors de chargements périodiques où suite à un impact grâce à la méthode d'expansion modale qui décompose le mouvement complet en un somme de produits entre les fonctions modales et les fonctions temporelles appelées coordonnées modales. La méthode classique pour résoudre les équations de poutre de Timoshenko pour des vibrations forcées est de garder ses deux équations de mouvement couplées. (Majkut, 2009) procède différemment. Les équations sont découplées et l'auteur calcule la solution de l'équation non-homogène du déplacement transverse grâce à la fonction dynamique de Green. Cette dernière représente l'amplitude des vibrations de la poutre excitée par une force unitaire harmonique. La technique de résolution de (Majkut, 2009) semble être plus compliquée que celle de (Han et al., 1999), puisqu'elle nécessite des opérations mathématiques pour découpler les deux équations. Un inconvénient supplémentaire est que la fonction de Green comporte beaucoup de termes à calculer.

Dans les théories des poutres classiques les couplages de vibrations transverses avec les vibrations en torsion ou longitudinales sont négligés. Ceux-ci peuvent cependant avoir une influence sur le comportement des poutres étudiées, puisqu'ils peuvent modifier les fréquences propres notamment. (Banerjee, 2001) a développé une théorie de poutre qui prend en compte les modes de torsion dans le modèle de Timoshenko. Dans le cas dans la théorie classique de Timoshenko les fonctions modales sont 2 nombres d'onde, mais sont désormais fonction de 3 nombres d'onde. Les nombres d'onde sont également appelés fréquences spatiales et représentent le nombre de cycles d'une onde par unité de distance. Cette théorie développée initialement pour les poutres homogènes isotropes à section pleine peut être adaptée pour des poutres à section creuse, à épaisseur variable et même pour des poutres en composites.

Bien que les méthodes analytiques soient d'une importance cruciale, les méthodes semi-analytiques sont très répandues pour calculer la solution à des problèmes théoriques complexes. C'est le cas de (J. Lee & Schultz, 2004) qui ont développé des solutions aux problèmes des poutres de Timoshenko et des plaques de Mindlin axisymétriques grâce à la méthode pseudospectrale de Chebyshev. Dans cette méthode, le déplacement transverse et l'angle de flexion sont décomposés en un produit d'une fonction spatiale et d'une fonction temporelle. La fonction temporelle est un simple cosinus. La fonction spatiale est une somme finie et pondérée de polynômes de Chebyshev. Ces polynômes sont orthogonaux et permettent ainsi d'utiliser la technique de l'expansion modale. Ces expressions sont injectées dans les équations des poutres et de plaques pour ensuite trouver les fréquences propres du problème. Ceci signifie que contrairement à la technique de Rayleigh-Ritz, le problème des poutres de Timoshenko ne peuvent être résolues que pour des poutres homogènes à section constante grâce à la manière avec laquelle la méthode a été implémentée. De plus, dans cet article, la méthode n'a permis de calculer que les fréquences propres contrairement à la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les polynômes de Chebyshev sont des polynômes orthogonaux. Ils sont générés grâce à une relation qui calcule le $n^{\text{ème}}$ polynôme grâce aux deux polynômes précédents. Plusieurs auteurs les utilisent dans leurs méthodes (Mohammadi & Ghannadpour, 2011; Ruta, 1999, 2006). Cependant, ce n'est pas le seul type de polynômes qui a été utilisé dans la littérature. (Behera & Chakraverty, 2013) ont préféré utiliser des monômes à exposant croissant et même des polynômes grâce au processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

La plupart des recherches se concentrent sur les poutres linéaires, mais quelques auteurs se sont penchés sur l'étude des poutres non-linéaires. C'est le cas de (Azrar, Benamar, & White, 1999) dont l'objectif était d'étendre l'analyse des vibrations non-linéaires des poutres homogènes encastrées et simplement supportées à des vibrations forcées grâce à une méthode semi-analytique. La formulation mathématique a été obtenue grâce aux équations de Lagrange et de la méthode de balance harmonique (« harmonic balance method ») plutôt que d'utiliser le principe de Hamilton. Par la suite, l'hypothèse du premier mode est faite (« Single mode hypothesis ») afin de trouver une solution du système réduit à une équation de Duffing. Certains auteurs préfèrent cependant utiliser la méthode de perturbation pour accroitre la précision de leurs résultats. Cependant, l'utilisation de cette méthode n'a été illustrée que pour les vibrations non-

linéaires et seule la première fréquence propre est calculée contrairement à la méthode de Rayleigh-Ritz.

Dans l'étude de (Zhong & Guo, 2003) la méthode des quadratures différentielles (« Differential Quadrature Method ») est employée pour résoudre les équations d'une poutre de Timoshenko non-linéaire simplement supportée. Dans cette méthode les dérivées de certaines fonctions sont des sommes pondérées des mêmes fonctions évaluées en plusieurs points dans le domaine de définition spatial de la poutre. Les équations différentielles et les équations des conditions aux limites sont déterminées en partant des expressions des énergies grâce à la méthode de Hamilton. L'influence de certains termes non-linéaires est étudiée et une comparaison est également faite avec les résultats pour une poutre non-linéaire simplement supportée utilisant le modèle d'Euler-Bernoulli. Il a été prouvé que les termes non-linéaires peuvent être négligés pour les poutres minces. Cette méthode permettrait de calculer les réponses transitoires mais est relativement complexe à mettre en œuvre.

Les recherches exposées jusqu'à présent se concentrent sur l'étude de poutres homogènes isotropes en se basant sur la théorie d'élasticité locale. Cette théorie fait l'hypothèse que les contraintes en un certain point ne dépendent uniquement que des déformations en ce même point. La théorie d'élasticité non-locale d'Eringen fait l'hypothèse que les contraintes en un point ne sont plus seulement fonction de la déformation en ce même point, mais sont plutôt fonction des déformations de tous les points du milieu considéré. En se basant sur cette théorie (Reddy, 2007) a résolu les équations des poutres d'Euler-Bernoulli, de Timoshenko, de Reddy (du même auteur) et de Levinson. Les deux derniers modèles de poutres sont décrits par les mêmes schémas de déformation dérivés des relations constitutives contraintes-déformations locales. L'effet non-local a pour effet de réduire les rigidités et d'abaisser les fréquences propres.

Les recherches mentionnées jusqu'à présent ne font état que des applications dans des échelles macroscopiques. Cependant les théories des poutres peuvent également être appliquées à des échelles beaucoup plus petites telle que l'échelle nanométrique. Les dernières années ont été marquées par un fort intérêt pour les nanotubes en carbone. En effet, les nanotubes en carbone présentent des propriétés mécaniques, électriques et chimiques très intéressantes et des nanotubes en carbone sont déjà disponibles sur le marché pour des applications de pointe. (Wang, Tan, & Zhang, 2006) ont résolu les équations de Timoshenko pour des nanotubes à parois multiples en

carbone en utilisant la méthode de quadrature différentielle. Les nanotubes à parois multiples sont formés par plusieurs nanotubes coaxiaux imbriqués. Le déplacement de chaque nanotube est couplé aux nanotubes adjacents, entre autre, par les forces Van der Waals. La théorie d'Euler-Bernoulli est très répandue dans le domaine, mais ne donne pas de résultats satisfaisants pour des poutres épaisses. Un modèle à poutre unique, où toutes les parois sont associées à une seule poutre, même si elles ne se touchent pas, donne des résultats satisfaisants lorsque chaque nanotube est mince. Cependant, un modèle multi-poutres, où chaque paroi est associée à une poutre individuelle, est nécessaire pour calculer les vibrations de nanotubes épais à parois multiples. Ces derniers possèdent des propriétés plus intéressantes encore que les nanotubes en carbone à paroi simple. En effet, une résistance mécanique, une conductivité électrique et thermique plus élevées sont possibles. Ils pourront être utilisés par exemple pour fabriquer des capteurs, des écrans électromagnétiques, des équipements sportifs et dans un grand nombre d'applications (Cefic, n.d.).Lors de l'étude de nanopoutres de Timoshenko les effets de petite échelle deviennent importants. Ces effets sont comptabilisés dans la théorie non-locale de Timoshenko grâce à un terme supplémentaire par rapport à la théorie classique locale de Timoskenko. (Mohammadi & Ghannadpour, 2011) ont résolu les équations non-locales d'une nanopoutre de Timoshenko numériquement grâce à la méthode de Rayleigh-Ritz et grâce aux polynômes de Chebyshev du premier type. L'effet de petite échelle a pour influence d'abaisser les fréquences propres des nanopoutres et ce de manière significative pour les modes à hautes fréquences.

Les recherches mentionnées ci-haut ne traitent que de poutres étudiées de manière isolée. Mais il existe un grand nombre d'applications où ces éléments sont utilisés dans des structures pour la transmission de puissance ou pour la construction de châssis ou de treillis. (Guo, Chen, & Pao, 2008) ont utilisé la méthode de « Reverberation-Ray Matrix » pour calculer la réponse transitoire d'une structure tridimensionnelle composée de poutres de matériaux isotropes avec des chargements concentrés et distribués. Selon les auteurs, il est préférable d'utiliser cette méthode plutôt que les méthodes de « Exact Dynamic Stiffness Method », « Transfer Matrix Method », « Spectral Element Method » et « Wave Traveling Approach » lorsque des hautes fréquences interviennent et lorsqu'il faut calculer les réponses transitoires lorsque $t > 0.05$ s. Bien qu'efficace, cette méthode est très difficile à mettre en œuvre et dépasse largement les besoins de cette recherche.

1.1.2 Matériaux composites et « FGM »

Bien que les poutres homogènes isotropes soient la base de la théorie des poutres, les poutres non-homogènes et/ou non-isotropes sont d'une grande importance. En effet, les matériaux non-homogènes et/ou non-isotropes permettent entre autres d'augmenter la résistance mécanique, aux impacts et aux températures élevées. Des applications de tels matériaux peuvent être rencontrées dans le domaine aéronautique par exemple pour la construction des ailes, du fuselage et d'autres pièces (Gong, Lam, & Reddy, 1999). Les poutres en composites entrent dans cette catégorie. (Ecsedi & Dluhi, 2005) ont développé un modèle linéaire pour des poutres non-homogènes présentant une courbure dans un repère d'axes curviligne.

(Kim & White, 1996) ont développé une théorie pour des poutres en composites laminées orthotropes, creuses, à parois minces ou épaisses dans un repère d'axes curvilignes. Cette théorie prend en compte le cisaillement transversal, les fonctions de gauchissement de premier et de deuxième degré et des effets élastiques tridimensionnels. Contrairement aux études précédentes, cette théorie ne fait pas l'hypothèse de contraintes de cisaillement constantes à travers l'épaisseur des parois dans le développement des fonctions de gauchissement. Les résultats sont validés pour des poutres à section circulaires et rectangulaires à parois minces, ainsi que pour des poutres à parois épaisses.

Dans le même ordre d'idée (Vo & Lee, 2008a) ont développé un modèle vibratoire de poutres minces laminées orthotropes à section creuse sur base de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love qui prend en compte le couplage des modes de flexion et les modes de torsion et qui est calculé par éléments finis. La méthode des éléments finis est très utilisée pour résoudre des problèmes qui ne sont pas ou sont difficilement résolubles avec les méthodes analytiques. Ce modèle est capable de gérer des séquences d'empilement arbitraires. Les équations de mouvement sont calculées grâce au principe de Hamilton et les équations sont résolues grâce à la une méthode d'éléments finis basée sur les déplacements.

Les « FGM » (« Functionnaly Graded Materials ») sont le sujet de plus en plus de recherches parce qu'ils présentent des propriétés intéressantes qui pourraient être utiles pour des applications avec des températures élevées, par exemple. Les « FGM » sont des matériaux dont les propriétés varient à travers une direction préférentielle telle que leur épaisseur, contrairement aux matériaux composites classiques où l'on suppose que les propriétés sont constantes à travers chaque couche

individuelle. Les « FGM » permettent de soutenir des gradients de températures élevés tout en maintenant leur intégrité structurelle. Ils sont donc utilisés dans des domaines tel que le nucléaire, l'aéronautique etc. Les matériaux « FGM » sont principalement utilisés dans les applications où des gradients de température importants peuvent survenir. En effet, grâce aux « FGM » les faces des structures qui sont soumises à des températures très élevées de l'ordre de 2000K peuvent être protégées lorsque celles-ci sont constituées de matériaux adaptés et formant donc un revêtement protecteur. Les pales d'une turbine à gaz sont une application (Mahamood, Akinlabi, Shukla, & Pityana, 2012). Certains auteurs se sont intéressés aux poutres non-homogènes en « FGM ». (Ziane, Meftah, Belhadj, Tounsi, & Bedia, 2013a) ont étudié des poutres « FGM » à section creuse et ont résolu les équations de manière analytique. Le champ de déplacement considéré prend en compte les rotations des plans autour des trois axes principaux avec des fonctions de gauchissement. La matrice de rigidité utilisée possède la forme de la matrice de rigidité d'un matériau isotrope, mais les composantes varient à travers l'épaisseur. Les équations de mouvement ont été obtenues grâce au principe de Hamilton.

(Qatu & Iqbal, 2010) ont utilisé le modèle de poutres d'Euler-Bernoulli pour calculer les fréquences propres d'un système de deux poutres cylindriques en composites orthotropes articulées entre elles et simplement supportées à leur deuxième extrémité et possédant des masses concentrées sur l'articulation. Dans cette étude l'orientation des couches de composites a été choisie pour ne pas induire de couplage entre les vibrations transverses et en torsions.

1.2 Plaques et coques

1.2.1 Matériaux isotropes

Bien que les poutres continuent à intéresser un grand nombre de chercheurs, les plaques et les coques reçoivent également beaucoup d'attention. La caractéristique des plaques est que l'une de leurs dimensions est plus faible que les deux autres. Cette caractéristique est valable pour les coques également, mais dans un repère d'axes curvilignes.

(Cheung & Zhou, 2000) ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz afin de résoudre des problèmes de plaques de Mindlin homogènes isotropes, grâce à des fonctions modales de Timoshenko « statiques ». Les fonctions modales de Timoshenko « statiques » sont représentées par des polynômes de troisième ordre avec une fonction trigonométrique de sinus ou de cosinus

supplémentaire. L'avantage de cette représentation est la simplicité de représentation et la validité pour n'importe quelle condition limite classique d'une poutre. Les même auteurs ont par la suite étendu leur recherche sur les plaques de Mindlin homogènes isotropes fuselées (Cheung & Zhou, 2003).

Les coques sont en général décrites dans un repère d'axes curvilignes. Plusieurs auteurs se sont intéressés aux coques cylindriques laminées à section fermée. (Y.-S. Lee & Lee, 1997) ont calculé la réponse temporelle de plusieurs coques cylindriques en composites multi-couches simplement supportées pour plusieurs cas de chargement transverses, grâce à la théorie des plaques du premier ordre. Les résultats ont été validés grâce au logiciel ABAQUS.

(Lam & Qian, 2000) ont résolu les équations de plaques cylindriques avec un schéma de déformation du premier ordre dans des axes cylindriques grâce à une méthode complexe plutôt qu'avec la méthode d'intégration des énergies potentielles et cinétiques de la méthode énergétique. La méthode complexe consiste à définir les déplacements et les angles du plan neutre grâce à produit d'exponentielles réelles et complexes. Les parties réelles et imaginaires des équations résultantes sont posées égales à zéro lors de la résolution.

1.2.2 Matériaux composites et « FGM »

Les « FGM » ont été introduits plus haut en exposant les recherches sur les poutres (Gong et al., 1999) ont étudié les réponses vibratoires de plaques cylindriques monocouches « FGM » et multicouches « FGM » suite à des impacts à basse vitesse en utilisant la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (« Higher order Shear Deformation Theory »). Les matrices de rigidité utilisées sont les mêmes que des matériaux isotropes à l'exception que la valeur des composantes varie à travers l'épaisseur. Les plaques en question étaient composées d'acier inoxydable ainsi que de nitrite de silice. Ils sont parvenus à déterminer quelle configuration de plaques « FGM » soutien le mieux des impacts.

Au vu des informations illustrées ci-dessus la méthode des modes assumés (Cheng et al., 2006; Mostafavi Yazdi & Irani, 2009) a été choisie parce qu'elle est la plus appropriée selon l'auteur. Il s'agit d'une méthode qui utilise les expressions des énergies et peut donc calculer la solution à des problèmes complexes. Une fois les expressions des énergies calculées le principe de Hamilton est utilisé conjointement avec les équations de Lagrange pour générer un système

d'équations couplé qu'il faut résoudre. De plus, la méthode des modes assumés est en mesure de calculer les vibrations transitoires. La possibilité de pouvoir choisir des fonctions modales décrivant un problème simplifié ressemblant au problème étudié assure une convergence plus élevée que dans le cas des autres méthodes qui utilisent des polynômes. De plus son implémentation est moins compliquée que la méthode de la « Reverberation-Ray Matrix ». La méthode des modes assumés sera détaillée par la suite.

Bien que non-exhaustive cette revue de littérature donne un bon aperçu des recherches qui ont eu lieu dans des domaines proches ou éloignés du sujet de recherche présent. L'accent a surtout été mis sur les recherches présentant des méthodes analytiques ou semi-analytiques et non sur des méthodes d'éléments finis. Un élément intéressant en ressort également. Le principe de Hamilton a été sélectionné par un grand nombre de chercheurs (Azrar et al., 1999; Banerjee, 2004; Cheng, Xu, & Yan, 2006; Han et al., 1999; Lam & Qian, 2000; Mohammadi & Ghannadpour, 2011; Reddy, 2007; Ruta, 2006; Vo & Lee, 2008b; Zhong & Guo, 2003; Ziane, Meftah, Belhadj, Tounsi, & Bedia, 2013b) pour calculer les équations de mouvement des problèmes considérés.

Dans le chapitre qui suit les objectifs et la méthodologie sont posés. Les notions et définitions spécifiques à cette étude sont développées plus en détail dans les Chapitre 3 et Chapitre 4.

CHAPITRE 2 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

L'objectif de cette recherche est de modéliser les vibrations transversales transitoires d'une poutre en composite multicouche à section creuse suite à un impact. Plus précisément il faut :

- Développer un modèle théorique et l'implémenter sur ordinateur.
- Construire des poutres et les tester pour en extraire les fréquences propres.
- Simuler les poutres construites et obtenir des résultats théoriques proches des résultats expérimentaux.
- Réaliser une étude paramétrique fonction de la séquence d'empilement des couches en composites.

En effet, la plupart des études s'arrêtent à l'analyse des fréquences propres et n'étudient pas le comportement transitoire. De plus, les résultats théoriques présentés sont rarement validés avec des résultats expérimentaux.

Les sections de la poutre et de chaque couche individuelle sont supposées être rectangulaires, creuses et constantes le long de l'axe de la poutre étudiée. De cette manière, la section de la poutre est modélisée tel un imbriquement concentrique de plusieurs sections rectangulaires. Seules les vibrations transverses sont étudiées et les vibrations longitudinales et en torsion sont négligées.

Les paramètres principaux du problème sont les conditions limites de la poutre, les dimensions géométriques de chaque couche, les matériaux utilisés, la séquence d'empilement et le chargement externe. Les conditions aux limites sont celles d'une poutre encastrée-libre. Les paramètres géométriques sont la longueur de la poutre, son aire et son second moment de surface. Les paramètres qui traduisent les propriétés des matériaux utilisés sont les modules de rigidité et les coefficients de Poisson. Les modules de rigidité sont calculés grâce à la rotation des matrices de souplesse de chaque matériau dans ses axes principaux, autour de deux axes.

Bien que plusieurs méthodes existent pour résoudre le problème, tel qu'exposé dans la revue de littérature, la méthode des modes assumés a été retenue parce qu'elle offre principalement deux avantages par rapport aux autres méthodes. En effet, elle possède des taux de convergence plus élevés que les autres méthodes puisqu'elle utilise des fonctions modales qui approchent le

problème étudié. Au plus les fonctions modales utilisées sont proches du problème modélisé, au plus le taux de convergence est élevé. Deuxièmement, les fonctions modales utilisées sont celles du problème homogénéisé. Cette technique permet de comparer les fréquences propres du problème homogénéisé avec celles du problème à résoudre. Elles permettent donc de valider plus facilement les résultats puisqu'elles offrent une base de comparaison. Pour finir, à la connaissance la plupart des méthodes ne peuvent pas être utilisées pour le calcul des réponses transitoires contrairement à la méthode des modes assumés.

Il est nécessaire de passer par plusieurs étapes pour résoudre le problème étudié. La méthode des modes assumés est une méthode qui discrétise le problème à partir des équations d'énergie du problème. Ces dernières sont dérivées grâce aux hypothèses du problème. Ces équations nécessitent des fonctions modales, des modules de rigidité, les informations géométriques du problème étudié et une fonction décrivant le chargement externe. Ces quatre types de données sont donc calculés avant de dériver les expressions des énergies. Les fonctions modales calculées sont celles du problème homogénéisé. Les raisons de ce choix sont expliquées en détail dans les chapitres qui suivent. La fonction décrivant le chargement externe est interpolée à partir d'une courbe d'impact obtenue de manière expérimentale.

La discrétisation du problème résultant de la méthode des modes assumés donne un système d'équations différentielles couplées. Ce système est découplé et ensuite résolu. Par la suite les solutions du système découplé sont recouplées pour obtenir la solution du problème étudié.

CHAPITRE 3 THÉORIE CLASSIQUE DES STRATIFIÉS ET DES POUTRES

Ce chapitre reprend les éléments de base de résistance des matériaux, des schémas de déformation et des théories des poutres nécessaires à la compréhension du travail et les adapte au sujet traité. Il s'agit d'un chapitre général qui ne rentre pas encore dans les spécificités du problème étudié. Les théories et méthodes présentées ici sont tirées de la littérature, dans le but d'établir au Chapitre 6 le modèle spécifique élaboré dans le cadre de ce travail.

Pour commencer les hypothèses de validité du modèle sont établies et les conventions sont définies. Par la suite la notion du cisaillement est expliquée en détail et les matrices de souplesse sont dérivées.

Par la suite, les théories des poutres d'Euler-Bernoulli, de la poutre de cisaillement et de Timoshenko sont exposées et leurs solutions explicitées. Ce chapitre explique aussi comment les erreurs numériques sont évitées et comment effectuer le transfert entre les solutions adimensionnelles et les solutions dimensionnelles des théories des poutres.

3.1 Cadre de validité du modèle développé

Le code développé dans le cadre de ce mémoire est basé sur des théories compliquées. Cependant, certaines hypothèses simplificatrices ont été adoptées afin de s'assurer de bien maîtriser le code et de bien comprendre les phénomènes physiques qui s'y déroulent.

Le code construit peut traiter les vibrations transversales et longitudinales, mais ne prend pas en compte l'effet Poisson, ni la torsion ni les couplages de torsion. Ceci induit des hypothèses sur le type de poutre que le code peut traiter, pour que de la torsion n'apparaisse pas. À cette fin, les composites à section creuse rectangulaire peuvent être composés de couches unidirectionnelles si et seulement si elles forment un angle de 0° ou 90° avec l'axe longitudinal de la poutre ou être composées de couches bidirectionnelles avec des angles de 0°/90° ou de +45°/-45°. Ces hypothèses sont justifiées plus bas dans le paragraphe 3.6.

3.2 Généralités

Le repère dextrogyre illustré à la Figure 3-1 est choisi pour tous les développements. L'axe « x » désignera toujours le sens de longitudinal des stratifiés, l'axe « y » le sens de la largeur (dans le plan formé par les couches) et pour finir l'axe « z » le sens de la hauteur (à travers le plan).

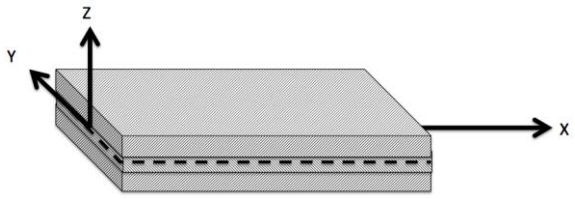


Figure 3-1: Définition des axes sur un stratifié

Le plan en pointillé représente le plan neutre de flexion. Le sens positif des angles de rotation sur le repère dextrogyre est obtenu avec la règle de la main droite en plaçant le pouce vers la direction croissante des axes comme illustré par la Figure 3-2.

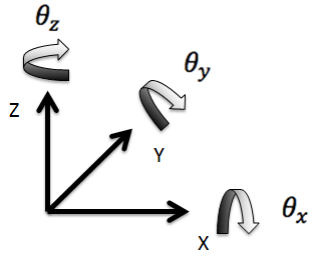


Figure 3-2 : Illustration des angles positifs

La partie blanche des flèches illustrées dans la Figure 3-2 est plus proche du lecteur que la partie noire. Le sens positif des contraintes par rapport aux faces d'un solide est illustré par la Figure 3-3 :

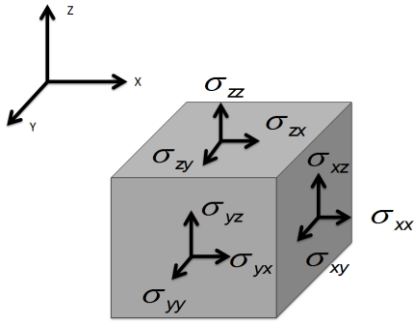


Figure 3-3 : Orientation des contraintes positives sur les faces d'un élément infinitésimal

Un stratifié de matériaux composites est défini par une superposition de plusieurs strates, également appelées couches ou plis, de matériaux composites. La définition d'un matériau composite est simple. Il s'agit d'un mélange composé de deux ou plusieurs matériaux non-miscibles. L'objectif est de permettre d'utiliser les propriétés de chaque matériau de telle sorte d'obtenir un mélange qui est plus performant qu'un matériau homogène. Les matériaux composites peuvent contenir des matériaux sous forme de fibre ou non. Les matériaux composites fabriqués avec des fibres de verre ou de carbone avec une matrice en époxy sont très communs dans l'industrie.

Le code développé peut traiter n'importe quel type de matériau orthotrope et n'importe quel agencement de couches dans un stratifié, pourvu que les caractéristiques mécaniques et que la séquence d'empilement lui soit fournies en s'assurant qu'il n'y ait pas de couplages vibratoires induits. Dans le cas contraire, le code calculera des solutions qui ne représentent pas correctement le problème étudié.

Dans la théorie classique des stratifiés, appelée aussi la théorie de « Mindlin-Reissner » ou champ de déplacement de premier ordre, les sections perpendiculaires au plan neutre restent droites suite aux déformations. Cette théorie définit le champ de déplacement à travers l'épaisseur du stratifié tel que suit (Berthelot, 1996):

$$u = u_0 + z * \phi_x$$
$$v = v_0 + z * \phi_y \qquad 3.1$$
$$w = w_0$$

où u est le déplacement total et u_0 le déplacement du plan neutre selon l'axe « x ». v est le déplacement total et v_0 le déplacement du plan neutre selon l'axe « y ». w est le déplacement total et w_0 le déplacement du plan neutre selon l'axe « z ». ϕ_x est l'angle de flexion, dans le sens positif, que forme la section initialement contenue dans le plan « yz » autour de l'axe « y » et ϕ_y est l'angle de flexion, dans le sens négatif, que forme la section initialement contenue dans le plan « xz » autour de l'axe « x ».

La relation des angles ϕ_x et ϕ_y avec les angles du repère dextrogyre sont les suivantes :

$$\phi_x = \theta_y$$
$$\phi_y = -\theta_x \qquad 3.2$$

Les déformations sont exprimées de la manière suivante (Berthelot, 1996):

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi_x\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}v_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi_y\right) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}u_0 + \frac{\partial}{\partial x}v_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi_x + \frac{\partial}{\partial x}\phi_y\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}w_0 + \phi_x \\ \frac{\partial}{\partial y}w_0 + \phi_y \end{bmatrix} \qquad 3.3$$

Où ϵ représente une déformation normale aux faces du solide considéré et γ_{ab} représente un angle de cisaillement de la face « a » vers l'axe « b » du repère. Le fait que ε_{zz} soit nul est une conséquence du choix du champ de déplacement adopté par les équations 3.1. En éliminant ε_{zz} des expressions ci-haut sont simplifiées tel que suit :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi_x\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}v_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi_y\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}u_0 + \frac{\partial}{\partial x}v_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi_x + \frac{\partial}{\partial x}\phi_y\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}w_0 + \phi_x \\ \frac{\partial}{\partial y}w_0 + \phi_y \end{bmatrix} \qquad 3.4$$

Dans le cadre de cette recherche le champ de déplacement est considéré continu à travers les couches. Le champ de déplacement est donc global.

Chaque couche du stratifié est supposée être un matériau orthotrope. Le lien entre les déformations et les contraintes dans les axes principaux est exprimé par la relation matricielle suivante (Berthelot, 1996):

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}_{principaux} = \begin{bmatrix}S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0\\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0\\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}_{principaux} \qquad 3.5$$

$$\Leftrightarrow [\boldsymbol{\epsilon}] = [\boldsymbol{S}].[\boldsymbol{\sigma}]$$

Où les $S_{i,i}$ représentent les termes de la matrice de souplesse dans les axes principaux. Les relations 3.5 découlent de la théorie d'élasticité locale pour tous les éléments infinitésimaux de la structure étudiée. Elles expriment principalement quatre choses.

- Les déformations normales sont toutes trois couplées avec les trois contraintes normales.
- Les déformations de cisaillement ne sont pas couplées aux contraintes de cisaillement.
- Les déformations normales ne sont pas couplées aux contraintes de cisaillement et de manière réciproque les déformations de cisaillement ne sont pas couplées aux déformations normales.
- Les termes non-diagonaux transposés sont égaux :

$$S_{i,j} = S_{j,i}\ pour\ i \neq j\ et\ i,j = 1..3$$

Les composantes de la matrice de souplesse pour un matériau orthotrope dans les axes principaux sont définit comme suit :

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix}S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0\\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0\\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,2}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{v_{1,2}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{v_{2,3}}{E_2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{v_{1,3}}{E_1} & -\frac{v_{2,3}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{2,3}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}}\end{bmatrix} \qquad 3.6$$

Il est important de mentionner le cas particulier des matériaux isotropes pour lesquels les trois modules de Young, les trois coefficients de Poisson et les trois modules de cisaillement sont égaux :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$
$$G_{1,2} = G_{1,3} = G_{2,3} = G \qquad 3.7$$
$$\nu_{1,2} = \nu_{1,3} = \nu_{2,3} = \nu$$

La matrice de souplesse pour un matériau isotrope est la suivante :

$$[\boldsymbol{S}]_{homogène} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,1} & S_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,2} & S_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \qquad 3.8$$

Et elle reste la même peu importe le repère dans lequel elle est exprimée. Dans le cas général d'un matériau orthotrope la matrice de rigidité dans les axes principaux est obtenue en inversant la matrice de souplesse :

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{principaux} = [\boldsymbol{C}].[\boldsymbol{\epsilon}]_{principaux} \qquad 3.9$$

Où, $$[\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{S}]^{-1}$$

3.3 Définition du cisaillement

Le cisaillement est une notion très importante et ce paragraphe vise à expliquer le plus clairement possible en quoi il consiste. Par soucis de simplicité l'exemple qui suit traite d'une poutre homogène et isotrope dont l'axe longitudinal est « x ».

Lorsqu'une charge dirigée vers les « z » positifs est appliquée à l'extrémité droite de la poutre, elle induit un moment de flexion et du cisaillement et se déforme vers le haut selon une certaine courbe (Voir Figure 3-4). Reprenons l'expression du cisaillement transversal γ_{xz} :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \qquad 3.10$$

Il est important de comprendre que l'angle ϕ_x est l'angle de la section causé par le moment de flexion uniquement, peu importe si le cisaillement est pris en compte ou non. ϕ_x est appelé par la suite angle de flexion. La dérivée du déplacement transverse de la fibre neutre représente la pente de la fibre neutre et γ_{xz} représente l'angle de la section dû au cisaillement uniquement. Des explications supplémentaires sont données dans les paragraphes suivants. Une manière plus intuitive de comprendre cette relation consiste à exprimer la relation précédente de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} w_0 = \gamma_{xz} - \phi_x \qquad 3.11$$

Cette relation traduit le fait que la pente du plan neutre est fonction des deux angles γ_{xz} et ϕ_x mesurés à partir de l'horizontale. Le cisaillement sur un élément infinitésimal d'une poutre dont l'extrémité droite subit un chargement en cisaillement est illustré dans la Figure 3-4.

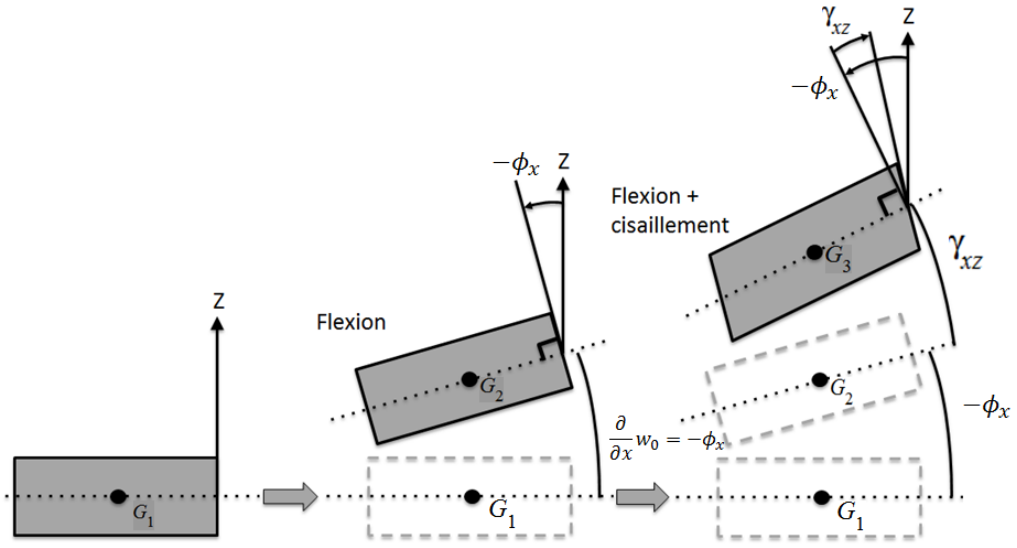


Figure 3-4 : Illustration de la contrainte de la déformation de cisaillement

Cette figure met en évidence trois cas différents. Dans le premier cas, aucun chargement n'est appliqué sur l'élément infinitésimal. Son centre de gravité G_1 repose à l'origine de l'axe « Z » et l'angle de son axe principal est nul par rapport à l'horizontale. Dans le deuxième cas, le chargement de cisaillement est appliqué, mais les contraintes de cisaillement sont négligées. Les déformations en cisaillement transversal sont donc également nulles. Le nouveau centre de gravité G_2 est plus élevé que G_1 et l'angle de la ligne neutre à cet endroit par rapport à l'horizontale vaut ϕ_x. Dans ce cas de chargement les sections de l'élément restent perpendiculaires à la ligne neutre. Ceci illustre le cas d'Euler-Bernoulli. Dans le troisième cas, les contraintes de cisaillement ne sont plus négligées. Le nouveau centre de gravite G_3 est encore plus élevé que G_2 et l'angle de la ligne neutre par rapport à l'horizontale vaut $-\phi_x + \gamma_{xz}$. Cependant, l'angle que forment les sections de l'élément par rapport à la verticale vaut $\frac{\partial}{\partial x} w_0 - \gamma_{xz} = -\phi_x$ avec la verticale. Ceci illustre le cas de Timoshenko. La déformée de Timoshenko possède une flèche plus élevée. En d'autres termes, avec la théorie de Timoshenko, une poutre donnée est plus souple qu'avec la théorie d'Euler-Bernoulli. La théorie de Timoshenko est bien entendu plus représentative de la réalité puisqu'elle prend en compte plus de mécanismes physiques de déformation.

3.4 Matrices de souplesse dans des axes non-principaux

Ce paragraphe se concentre sur l'obtention des matrices de souplesse dans des axes non-principaux. Les matrices de souplesse sont obtenues par rotation dans le plan formé par les axes principaux ainsi que dans un autre plan que celui formé par les axes principaux.

Ces développements sont réalisés parce que les poutres à section creuse comportent des parois horizontales et verticales. Pour cette raison, il est nécessaire de connaître les matrices de souplesse dans les axes de la poutre et non seulement dans les axes locaux des parois. Les résultats de ces matrices interviennent dans les calculs des théories des poutres.

Les développements qui suivent s'effectuent dans le repère local de la poutre :

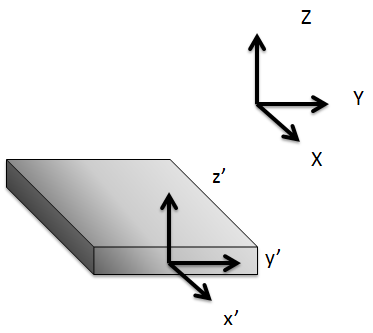


Figure 3-5 : Représentation du repère global de la poutre (x, y, z) et du repère local (x', y', z')

Les couches en composites bidirectionnelles utilisées dans cette recherche possèdent les propriétés suivantes :

$$E_1 = E_2$$
$$\nu_{1,2} = \nu_{2,1}$$
$$G_{1,3} = G_{2,3} \qquad 3.12$$
$$\nu_{1,3} = \nu_{2,3}$$

Ce qui résulte à la matrice de souplesse suivante :

$$[\boldsymbol{S}]_{orthotrope} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,1} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{1,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} \end{bmatrix} \qquad 3.13$$

Comme décrit dans l'ANNEXE I, il existe 4 matrices de souplesse différentes pour le problème étudié. En effet, dans cette recherche deux orientations de fibres par rapport à l'axe de la poutre sont utilisées, soit $0°\backslash 90°$ et ± 45. De plus, il faut connaître les matrices de souplesse lorsque les couches sont contenues dans le plan « XY » et lorsqu'elles sont contenues dans le plan « XZ ». Il s'agit des couches horizontales et des couches verticales respectivement. Toutes les matrices de souplesses sont calculées à partir de celle d'une couche horizontale avec une orientation de fibres à $0°\backslash 90°$. Ces quatre types de couches sont illustrés par la Figure 3-6.

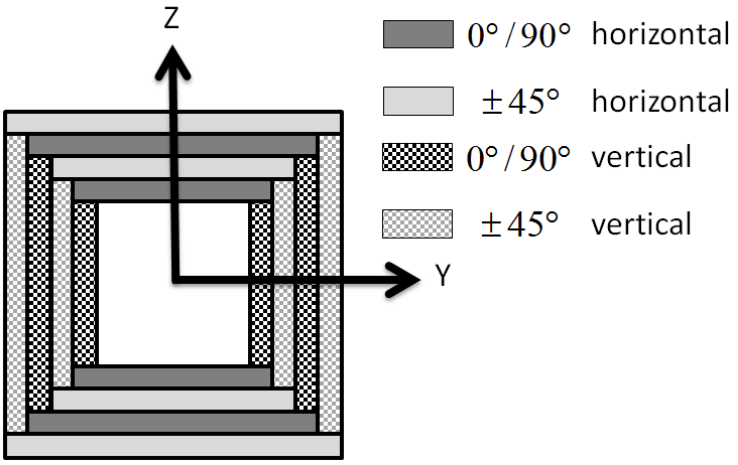


Figure 3-6 : Couches horizontales et verticales avec deux orientations de fibres possibles

Voici un tableau récapitulatif des quatre types de couches possibles avec leurs matrices de souplesse associées:

Tableau 3.1 : Récapitulatif des matrices de souplesse

Couche horizontale		Couche verticale	
0°\90°	±45°	0°\90°	±45°
$[\boldsymbol{S}]_{horiz}$	$[\boldsymbol{S'}]_{horiz}$	$[\boldsymbol{S}]_{vertic}$	$[\boldsymbol{S'}]_{vertic}$

Où,

$$[\mathbf{S}]_{\text{horiz}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{1,2}}{E_1} & -\frac{\nu}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{1,2}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}} \end{bmatrix} \quad 3.14$$

$$[\boldsymbol{S}']_{horiz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{1,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1-v}{\mathrm{E}_1} + \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} - \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} - \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} + \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & \frac{1}{\mathrm{E}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{G}_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{G}_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1+v_{1,2}}{\mathrm{E}_1}\right) \end{bmatrix} \quad 3.15$$

$$[\boldsymbol{S}]_{vertic} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,3} & S_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & -\frac{v_{1,2}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,2}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{S}']_{vertic} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1 - v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} + \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{1 - v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} - \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & \frac{1}{\mathrm{E}_3} & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1 - v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} - \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & -\frac{v_{1,3}}{\mathrm{E}_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{1 - v_{1,2}}{\mathrm{E}_1} + \frac{1}{2 * \mathrm{G}_{1,2}}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{G}_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1 + v_{1,2}}{\mathrm{E}_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{G}_{1,3}} \end{bmatrix} \quad 3.17$$

Les matrices de souplesse des matériaux composites utilisés sont explicitées dans le Chapitre 6.

3.5 Coefficients de Poisson dans les axes non principaux

Il est nécessaire de connaître les coefficients de Poisson dans les axes de la poutre afin de calculer le facteur de forme k' de la poutre. Ce facteur est présenté dans le paragraphe 3.8, car il est nécessaire dans les théories des poutres.

Partant de la matrice de souplesse :

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,2}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,2}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}} \end{bmatrix} \qquad 3.18$$

Les coefficients de Poisson peuvent être ré-exprimés par la relation ci-dessous :

$$v_{i,j} = -\frac{S_{i,j}}{S_{i,i}} \; pour \; i,j = 1,2,3 \; et \; i \neq j \qquad 3.19$$

La relation ci-dessus peut être généralisée pour une matrice de souplesse dans les axes de la poutre.

$$v_{i,j} = -\frac{S_{i,j}}{S_{i,i}} \; pour \; i,j = x,y,z \; et \; i \neq j \qquad 3.20$$

Pour illustrer la relation ci-dessus, les coefficients de Poisson pour une couche horizontale sont calculés lorsque les axes principaux forment 45 degrés avec les axes de la poutre :

$$v_{\pm 45^\circ horiz_{1,2}} = -\frac{S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{1}{2}S_{6,6}}{S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{1}{2}S_{6,6}} \qquad 3.21$$

$$v_{\pm 45^\circ horiz_{1,3}} = -\frac{S_{1,3}}{S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{1}{2}S_{6,6}}$$

$$v_{\pm 45^\circ horiz_{2,3}} = v_{\pm 45^\circ horiz_{1,3}} = -\frac{S_{1,3}}{S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{1}{2}S_{6,6}}$$

3.6 Couplages vibratoires

Une des hypothèses de cette recherche est qu'il n'existe pas de couplages vibratoires avec les vibrations transversales. En effet, la déformation transversale lors d'une flexion pure sur un stratifié classique possédant une séquence d'empilement symétrique n'est pas couplée avec une déformation longitudinale, ni en torsion. Les détails du calcul sont donnés dans le paragraphe I.2 des annexes.

Dans les poutres à section creuse où les couches sont enroulées autour d'un mandrin, le seul moyen d'éviter d'avoir des couplages vibratoires avec des matériaux composites est d'utiliser des composites unidirectionnels avec des orientations de 0° ou 90° par rapport à l'axe de la poutre ou alors d'utiliser des composites bidirectionnels respectant les relations 3.12 avec des orientations de 0°\90° ou $\pm 45°$.

3.7 Simplifications pour les poutres

Une poutre est définie tout simplement par ses dimensions géométriques. En effet, il est admis que pour qu'une structure soit caractérisée comme une poutre, sa longueur soit être au moins dix fois plus grande que la dimension maximale de sa section.

Pour des raisons qui apparaitront plus tard, dans le Chapitre 4, l'intérêt principal se porte aux poutres homogènes à section constante et possédant deux axes de symétrie.

Lorsque les chargements sont limités à des forces centrées selon l'axe « z » et l'axe « x » il est possible de simplifier certains termes des équations de « Mindlin-Reissner ». Il est évident que ces simplifications ne donneront des résultats valables que lorsque les critères géométriques d'une poutre seront rencontrés.

Cette simplification consiste à mettre à zéro le terme de déplacement transversal selon l'axe « y », soit le terme v des relations 3.1, et à négliger les termes qui comportent des dérivées

partielles par rapport à « y ». Ces deux simplifications traduisent le fait que le plan neutre ne se déplace pas selon l'axe « y » et que tous les termes sont indépendants de la coordonnée « y ». Les équations de déplacement se réduisent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z * \phi_x \\ v &= 0 \\ w &= w_0 \end{aligned} \qquad 3.22$$

En dérivant les expressions des déformations se simplifient de tel que suit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u_0 + z * \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_x \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 3.23$$

De plus, dans les théories des poutres l'effet Poisson est négligé. Ceci est équivalent à faire l'hypothèse supplémentaire que les contraintes σ_{yy} et σ_{zz} et les contraintes ϵ_{yy} et ϵ_{zz} sont nulles. Cette hypothèse est expliquée dans l'ANNEXE I. En conséquence, la valeur des composantes de rigidité qui en résulte n'est plus la même.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

où les termes surlignés peuvent être éliminés.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{6,6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad 3.24$$

Où $S_{1,1} = \frac{1}{E_x}$ et donc, $\sigma_{xx} = C_{1,1} * \epsilon_{xx} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{1}{S_{1,1}} * \epsilon_{xx} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = E_x * \epsilon_{xx}$ 3.25

Où $C_{1,1}$ est la première composante de la matrice de rigidité dont la valeur est utilisée dans la théorie de poutres choisie. Celle-ci est également appelée coefficient de rigidité longitudinal dans le reste du texte. Les relations ci-dessus aboutissent à la loi de Hooke classique. Les développements ci-dessus permettent de comprendre que la loi de Hooke classique n'est obtenue que lorsque les déformations et les contraintes normales transversales sont négligées.

Cette même procédure peut être appliquée aux couches avec un angle de 45° par rapport à l'axe longitudinal, dont la matrice de souplesse est donnée par l'expression 3.14.

3.8 Théories de poutres

Il existe 4 théories de poutres, mais seule celle d'Euler-Bernoulli, de Rayleigh et de Timoshenko sont analysées dans ce chapitre puisqu'il s'agit des théories les plus utilisées et pour limiter l'envergure du travail. Les équations détaillées et la méthode de résolution, ainsi qu'un chapitre sur les erreurs numériques sont présentées dans le paragraphe I.3 de l'ANNEXE I.

Les résultats présentés ici sont les fonctions modales adimensionnelles, modifiées, permettant de faire disparaitre les erreurs numériques, ainsi que la méthode de redimensionnalisation des fonctions modales. Les fonctions modales sont par la suite injectées dans les expressions des énergies dans le Chapitre 4.

Dans ces théories les déplacements longitudinaux sont négligés :

$$u_0 = 0 \quad 3.26$$

3.8.1 Théorie de Euler-Bernoulli

Dans la théorie d'Euler-Bernoulli le cisaillement est négligé :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \Leftrightarrow \phi_x = -\frac{\partial}{\partial x} w_0 \qquad 3.27$$

L'équation ci-dessus traduit le fait que l'angle de la section par rapport à la verticale est égal à la pente de la fibre neutre en chaque point. Les sections sont donc bien perpendiculaires à la courbe de la fibre neutre. Dans le modèle d'Euler-Bernoulli il n'existe qu'une seule coordonnée indépendante, soit w_0.

En injectant la relation 3.26 dans l'équation 3.23, les relations ci-dessous sont obtenues :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_0 - z * \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 = -z * \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \qquad 3.28$$

Le déplacement transversal « w » est décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle. Voici les relations nécessaires qui font le passage entre les variables dimensionnelles et leur contrepartie adimensionnelle :

$$x = \xi * L \; avec \; \xi \in [0,1]$$

$$t = \frac{t^*}{\omega_1}$$

$$w(x,t) = w^*(\xi, t^*) * L$$

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * q_{W_i}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} (W_i^*(\xi) * L) * q_{W_i}^*(t^*) = w^*(\xi, t^*) * L \qquad 3.29$$

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * \dot{q}_{W_i}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} (W_i^*(\xi) * L) * (\dot{q}_{W_i}^*(t^*) * \frac{1}{\omega_1}) = \dot{w}^*(\xi, t^*) * \frac{L}{\omega_1}$$

Donc,

$$W_i(x) = W_i^*(\xi) * L$$

$$q_{W_i}(t) = q_{W_i}^*(t^*) \qquad 3.30$$

$$\dot{q}_{W_i}(t) = \dot{q}_{W_i}^*(t^*) * \frac{1}{\omega_1}$$

Les fonctions modales de Euler-Bernoulli modifiées pour une poutre encastrée-libre sont les suivantes :

$$W_i^* = e^{-b_i^* * \xi} - \cos(b_i^* * \xi) + (1+v)\sin(b_i^* * \xi) - v\sinh(b_i^* * \xi) \quad 3.31$$

Avec

$$v = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} + \cos(b_i^*) - \sin(b_i^*)}{\sinh(b_i^*) + \sin(b_i^*)} = \frac{\mathrm{e}^{-b_i^*} + \cos(b_i^*) - \sin(b_i^*)}{\frac{e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}}{2} + \sin(b_i^*)} \quad 3.32$$

Où b est le nombre d'onde et ξ la longueur adimensionnelle. Les fonctions modales doivent respecter la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M(\boldsymbol{W_j^*}) d\xi = \delta_{ij} \quad 3.33$$

où $M(\ \ )$ est un opérateur algébrique et $(\boldsymbol{W_i^*})$ est un vecteur colonne contenant la fonction modale (Han et al., 1999).

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi)\ ]$$
$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \rho^* A^* * \boldsymbol{W_i^*} \quad 3.34$$

Où ρ^* est la masse volumique adimensionnelle et A^* l'aire de section adimensionnelle :

$$\rho^* = \frac{\rho * L^6 * \omega_1^2}{E_x * I}$$
$$A^* = \frac{A}{L^2} \quad 3.35$$

Où L est la longueur de la poutre, ω_1 est la fréquence propre du premier mode, I le second moment de surface et E_x est le module de Young longitudinal dans les axes de la poutre.

3.8.2 Poutre de cisaillement et de Timoshenko

Contrairement au modèle d'Euler-Bernoulli les modèles de poutres de cisaillement et de Timoshenko prennent en compte le cisaillement. Les simplifications faites pour la théorie d'Euler-Bernoulli ne sont donc pas applicables. Reprenons la relation du cisaillement 3.11 :

$$\frac{\partial}{\partial x} w_0 = \alpha_x + \gamma_{xy}$$

Où $\alpha_x = -\phi_x$. Le symbole α est introduit afin de faire le passage entre les équations de (Berthelot, 1996) et celles de (Han et al., 1999).

L'angle de cisaillement γ_{xz} s'additionne à l'angle du moment de flexion α_x. La pente de la fibre neutre est donc plus élevée que dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli.

Dans les théories des poutres de cisaillement et des poutres de Timoshenko, α_x constitue la deuxième coordonnée indépendante.

$$\alpha_x(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x) * q_{PSI_i}(t) \qquad 3.36$$

Cependant, l'hypothèse est faite que le déplacement transverse et l'angle dû au moment de flexion sont gouvernés par les mêmes coordonnées modales (Han et al., 1999). Ceci se traduit par :

$$q_i(t) = q_{W_i}(t) = q_{PSI_i}(t) \qquad 3.37$$

Une notation qui sera utile dans le chapitre 2 est introduite (Han et al., 1999) :

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w(x,t) \\ \alpha_x(x,t) \end{bmatrix} \qquad 3.38$$

et donc,

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{bmatrix} W_i(x) \\ PSI_i(x) \end{bmatrix} * q_i() \qquad 3.39$$

$$\boldsymbol{w}^* = \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix} * q_i^*(t^*)$$

3.8.2.1 Fonctions modales de la poutre de cisaillement

Les formes modales adimensionnelles du déplacement transverse de la fibre neutre et de l'angle dû aux moments de flexion des sections de la poutre sont les suivants (Han et al., 1999):

$$W_i^*(\xi) = \mathrm{C}_1\sin(a_i^*\xi) + \mathrm{C}_2\cos(a_i^*\xi) + \mathrm{C}_3\sinh(\beta_i^*\xi) + C_4\cosh(\beta_i^*\xi)$$
$$PSI_i^*(\xi) = \mathrm{D}_1\sin(a_i^*\xi) + \mathrm{D}_2\cos(a_i^*\xi) + \mathrm{D}_3\sinh(\beta_i^*\xi) + D_4\cosh(\beta_i^*\xi) \quad 3.40$$

Où a_i^* et β_i^* sont les deux nombres d'onde. Ces expressions sont les expressions classiques et n'ont pas été modifiées pour faire disparaître les erreurs numériques. Pour une poutre encastrée libre, les valeurs des coefficients C et D sont les suivantes :

$$C_1 = 1 \qquad C_3 = -\frac{b_i^{*3}}{a_i^{*3}}$$
$$C_2 = -\frac{b_i^{*2}\left(b_i^* e^{b_i^*} - b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\, a_i^*\right)}{a_i^*\left(2b_i^{*2}\cos(a_i^*) + a_i^{*2}e^{b_i^*} + a_i^{*2}e^{-b_i^*}\right)} \qquad C_4 = -\frac{b_i^{*2}\left(b_i^* e^{b_i^*} - b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\, a_n^*\right)}{a_i^*\left(2b_i^{*2}\cos(a_i^*) + a_i^{*2}e^{b_i^*} + a_i^{*2}e^{-b_i^*}\right)} \quad 3.41$$

Avec
$$D_1 = -\frac{b_i^{*2}}{a_i^*}\, C_2 \qquad D_2 = \frac{b_i^{*2}}{a_i^*} C_1$$
$$D_3 = \frac{a_i^{*2}}{b_i^*} C_4 \qquad D_4 = \frac{a_i^{*2}}{b_i^*} C_3 \quad 3.42$$

Pour finir les fréquences propres sont calculées tel que suit :

$$\omega_i = \sqrt{a_i^{*2} - b_i^{*2}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} * \frac{1}{\gamma} \quad 3.43$$

Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\left(b_i^{*2} - a_i^{*2}\right) a_i^* b_i^* \sin(a_i^*)\sinh(b_i^*) + \left(b_i^{*4} + a_i^{*4}\right)\cos(a_i^*)\cosh(b_i^*) + 2a_i^{*2}b_i^{*2} = 0 \quad 3.44$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$b_i^* = a_i^* \sqrt{\frac{1}{\gamma^{*2}k^{*2}a_i^{*2} + 1}} \quad 3.45$$

Avec $\gamma^* = \sqrt{\frac{E_x}{k' * G_{xz}}}$ et $k^* = \sqrt{\frac{I}{A}} * \frac{1}{L}$ 3.46

Où k^* est le rayon de giration, le facteur de forme k' est une constante calculée sur base de la forme géométrique de la section de la poutre étudiée, ainsi que du coefficient de Poisson du matériau étudié. Il s'agit d'un coefficient qui pondère l'énergie potentielle de cisaillement transversal pour prendre en compte un profil de cisaillement transversal variable à travers la hauteur de la section qui est en général considéré constant (Han et al., 1999). Dans cette recherche l'hypothèse est faite que l'expression du facteur de forme est celle d'une section creuse rectangulaire à parois minces donnée par la relation ix. 9 de l'ANNEXE IX:

$$k' = \frac{20}{48 - 3\frac{v_{xy} G_{xy}}{E_x}}$$

Le cas particulier d'un matériau isotrope résulte à la relation ix. 11 :

$$k' = \frac{40(1+v)}{3(32+31v)}$$

Cette expression est légèrement différente que celle donnée par (Han et al., 1999). Les deux nombres d'onde peuvent être calculés numériquement. L'organigramme suivant présente la démarche pour calculer les solutions dans une gamme de valeurs du nombre d'onde a^* :

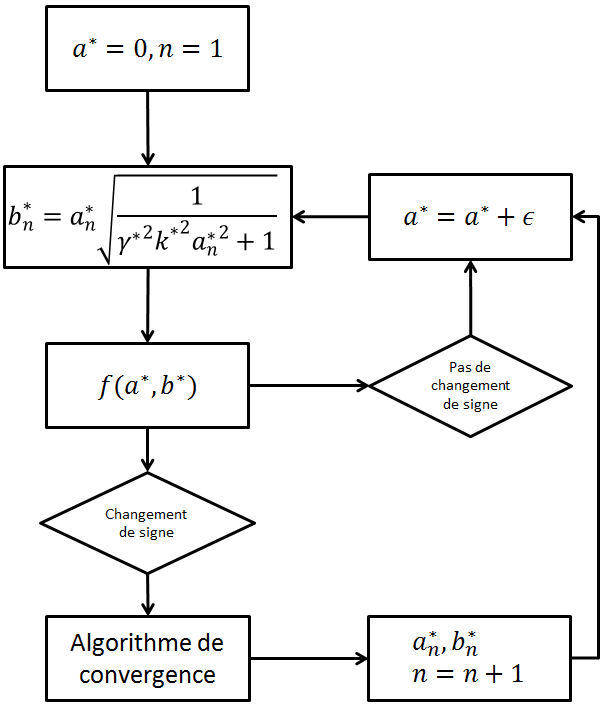

$a^* = 0, n = 1$
$b_n^* = a_n^* \sqrt{\frac{1}{\gamma^{*2} k^{*2} a_n^{*2} + 1}}$
$a^* = a^* + \epsilon$
$f(a^*, b^*)$
Pas de changement de signe
Changement de signe
Algorithme de convergence
a_n^*, b_n^*
$n = n + 1$

Figure 3-7 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de cisaillement

Où la fonction $f(\ \ )$ représente l'équation fréquentielle 3.44. L'algorithme de convergence utilise la fonction « fsolve » de MATLAB.

La relation d'orthogonalité des fonctions modales est identique que celle d'Euler-Bernoulli sous forme matricielle (Han et al., 1999) :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M\left(\boldsymbol{W_j^*}\right) d\xi = \delta_{ij}$$

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)] \qquad 3.47$$

et donc le vecteur de déplacement est exprimé d'Euler-Bernoulli,

$$\boldsymbol{w^*} = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{W_i^*} * q_i^*(t^*) \qquad 3.48$$

De plus l'opérateur $M(\ \ )$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix} \quad 3.49$$

De raisonnements similaires pour la poutre d'Euler-Bernoulli peuvent être faits pour passer de la forme dimensionnelle à la forme adimensionnelle :

$$\alpha_x + \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} w_0 = \frac{1}{L} * \frac{\partial}{\partial \xi} (w_0^* * L) = \frac{\partial}{\partial \xi} w_0^* = \alpha_x{}^* + \gamma_{xy}^* \quad 3.50$$

donc,

$$\alpha_x = \alpha_x{}^*$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* \quad 3.51$$

3.8.2.2 Fonctions modales de la théorie des poutres de Timoshenko

De même que la poutre de cisaillement, la poutre de Timoshenko possède également deux fonctions modales. Celle du déplacement transversal de la fibre neutre et celle de l'angle de flexion des sections de la poutre et dépendent elles-mêmes des deux nombres d'onde a_i^* et b_i^*. Par contre, les expressions des formes modales dépendent aussi de la valeur de a_i^*.

La méthode de (Gonçalves et al., 2007) a été généralisée par l'auteur dans le but d'obtenir des fonctions modales d'une poutre encastrée-libre de Timoshenko sans erreurs numériques. Dans le cas où $a_i^* < a_c^*$ donné par l'équation 3.58 les fonctions modales données par (Han et al., 1999) sont modifiées et l'expression finale est comme suit :

$$W_i^* = \sin(a_i^* \xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a_i^* \xi) + \mathrm{B} \sinh(b_i^* \xi) + C_4 \mathrm{e}^{-b_i^* \xi} \quad 3.52$$

Où

$$B = C_3 + C_4 \quad 3.53$$

Passons à l'expression de la fonction modale d'angle de flexion.

$$PSI_i^* = \mathrm{D}_1 \sin(a_i^* \xi) + \mathrm{D}_2 \cos(a_i^* \xi) + \mathrm{F} \sinh(b_i^* \xi) + D_4 \mathrm{e}^{-b_i^* \xi} \quad 3.54$$

Où

$$F = D_3 + D_4 \quad 3.55$$

Les calculs présentés par la suite ont été réalisés grâce aux expressions manipulées. Le lecteur intéressé se réfèrera à l'annexe 3 pour plus de détails sur les fonctions modales manipulées de la théorie des poutres de Timoshenko.

Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\left(a_i^{*2} - b_i^{*2}\right) sin(a_i^*)\, sinh(b_i^*) -$$

$$-\frac{a_i^* b_i^* \left(a_i^{*4} + a_i^{*4}\gamma^{*4} + 4 * \gamma^{*2} a_i^{*2} b_i^{*2} + b_i^{*4}\gamma^{*4} + b_i^{*4}\right)}{\left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} b_i^{*2}\right)} cos(a_i^*)\, cosh(b_i^*) - \qquad 3.56$$

$$-2a_i^* b_i^* = 0$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\frac{\left(\gamma^{*2} b_i^{*2} + a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2}\gamma^{*2} + b_i^{*2}\right)}{\left(a_i^{*2} - b_i^{*2}\right)\left(1 + \gamma^{*2}\right)} = \frac{1}{k^{*2}} \qquad 3.57$$

Le nombre d'onde critique a_c vaut :

$$a_c^* = \frac{1}{k^*}\sqrt{\frac{1}{\gamma^{*2}} + 1} \qquad 3.58$$

Dans le cas d'une poutre encastrée libre les coefficients possèdent les valeurs suivantes :

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = -\frac{2\sin(a_i^*)\, a_i^{*3} + a_i^{*2} b_i^* e^{b_i^*} - a_i^{*2} b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\, b_i^{*2}\gamma^{*2} a_i^* - \gamma^{*2} b_i^{*3} e^{-b_i^*} + \gamma^{*2} b_i^{*3} e^{b_i^*}}{a_i^*\left(2a_i^{*2}\cos(a_i^*) + 2\cos(a_i^*)\, b_i^{*2}\gamma^{*2} + b_i^{*2} e^{b_i^*} + b_i^{*2} e^{-b_i^*} + \gamma^{*2} a_i^{*2} e^{b_i^*} + \gamma^{*2} a_i^{*2} e^{-b_i^*}\right)}$$

$$= -\frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)} \qquad 3.59$$

$$C_3 = -\frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} b_i^{*2}\right) b_i^*}{a_i^*\left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} a_i^{*2}\right)}$$

$$C_4 = -C_2 = \frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^2 * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^2 * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^2 * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_1 = -\frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2} b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) a_i^*} C_2$$

$$= \frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right)^2 * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{b_i^*}\right)\right)}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * a_i^{*2} * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_2 = \frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2} b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) a_i^*} C_1 = \frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2} b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) a_i^*} \qquad 3.60$$

$$D_3 = \frac{b_i^{*2} + \gamma^{*2} a_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) b_i^*} C_4$$

$$= \frac{\left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * b_i^* * a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_4 = \frac{b_i^{*2} + \gamma^{*2} a_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) b_i^*} C_3 = -\frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * a_i^*}$$

L'expression des fréquences propres en fonction des nombres d'onde est la suivante :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\left(a_i^{*2} - b_i^{*2}\right)}{1 + \gamma^{*2}}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} \qquad 3.61$$

Cependant, lorsque $a_i^* > a_c^*$, b_i^* est remplacé par $i * \tilde{b}_i$ et donc les fonctions modales deviennent (Han et al., 1999) :

$$W_i^*(\xi) = \widetilde{C_1} * \sin(a_i^* * \xi) + \widetilde{C_2} * \cos(a_i^* * \xi) + \widetilde{C_3} * \sin\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) + \widetilde{C_4} * \cos\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right)$$
$$PSI_i^*(\xi) = \widetilde{D_1} * \sin(a_i^* * \xi) + \widetilde{D_2} * \cos(a_i^* * \xi) + \widetilde{D_3} * \sin\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) + \widetilde{D_4} * \cos\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) \qquad 3.62$$

Ces expressions n'ont pas besoin d'être modifiées puisqu'elles ne présentent pas d'erreurs numériques. Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\left(a_i^{*2} + \widetilde{b_i^*}^2\right)\sin(a_i^*)\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right) -$$

$$-\frac{a_i^*\widetilde{b_i^*}\left(a_i^{*4} + a_i^{*4}\gamma^{*4} - 4*\gamma^{*2}a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}^2 + \widetilde{b_i^*}^4\gamma^{*4} + \widetilde{b_i^*}^4\right)}{\left(-\widetilde{b_i^*}^2 + \gamma^{*2}a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2\right)}\cos(a_i^*)\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \qquad 3.63$$

$$-2a_i^*\widetilde{b_i^*} = 0$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\frac{\left(-\gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2 + a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2}\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\right)}{\left(a_i^{*2} + \widetilde{b_i^*}^2\right)\left(1 + \gamma^{*2}\right)} = \frac{1}{k^{*2}} \qquad 3.64$$

Dans le cas d'une poutre encastrée libre les coefficients possèdent les valeurs suivantes :

$$\widetilde{C_1} = 1$$

$$\widetilde{C_2} = -\frac{\sin(a_i^*)\,a_i^{*3} - a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \sin(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2}a_i^* + \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^3\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right)}{a_i^*\left(a_i^{*2}\cos(a_i^*) - \cos(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right) + \gamma^{*2}a_i^{*2}\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right)\right)}$$

$$\widetilde{C_3} = -\frac{\left(a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2\right)\widetilde{b_i^*}}{a_i^*\left(-\widetilde{b_i^*}^2 + \gamma^{*2}a_i^{*2}\right)} \qquad 3.65$$

$$\widetilde{C_4} = \frac{\sin(a_i^*)\,a_i^{*3} - a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \sin(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2}a_i^* + \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^3\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right)}{a_i^*\left(a_i^{*2}\cos(a_i^*) - \cos(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right) + \gamma^{*2}a_i^{*2}\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right)\right)} = -\widetilde{C_2}$$

$$\widetilde{D_1} = -\frac{a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2}{(1+\gamma^{*2})a_i^*}\widetilde{C_2} \qquad \widetilde{D_2} = \frac{a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2}{(1+\gamma^{*2})a_i^*}\widetilde{C_1}$$

$$\widetilde{D_3} = -\frac{\widetilde{b_i^*}^2 - \gamma^{*2}a_i^{*2}}{(1+\gamma^{*2})\widetilde{b_i^*}}\widetilde{C_4} \qquad \widetilde{D_4} = \frac{\widetilde{b_i^*}^2 - \gamma^{*2}a_i^{*2}}{(1+\gamma^{*2})\widetilde{b_i^*}}\widetilde{C_3} \qquad 3.66$$

L'expression des fréquences propres en fonction des nombres d'onde est la suivante :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\left(a_i^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\right)}{1+\gamma^{*2}}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} \qquad 3.67$$

Les deux nombres d'onde peuvent être calculés numériquement. Les organigrammes suivants présentent la démarche en deux étapes, pour calculer les nombres d'onde pour toutes les gammes de valeurs. g_1 représente l'équation 3.57 et f_1 représente l'équation fréquentielle 3.56. La manière d'isoler le nombre d'onde b^* est montré dans l'annexe 2. g_2 représente l'équation 3.64 et f_2 représente l'équation fréquentielle 3.63. La manière d'isoler le nombre d'onde $(\widetilde{b^*})$ est montré dans l'annexe 2.

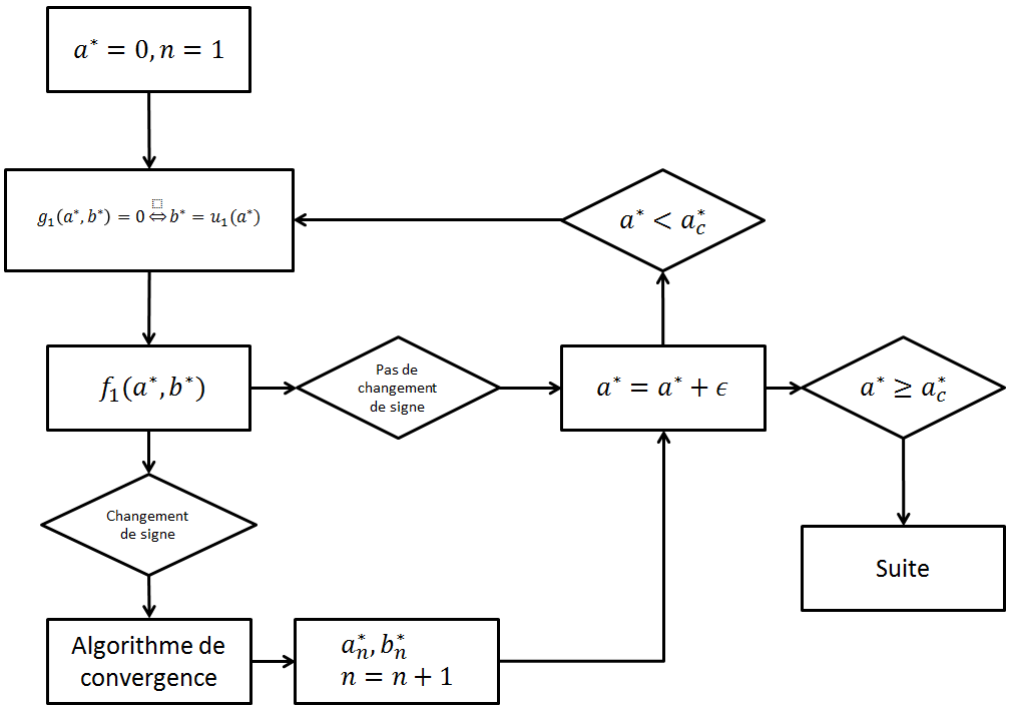


Figure 3-8 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a^* < a_c^*$

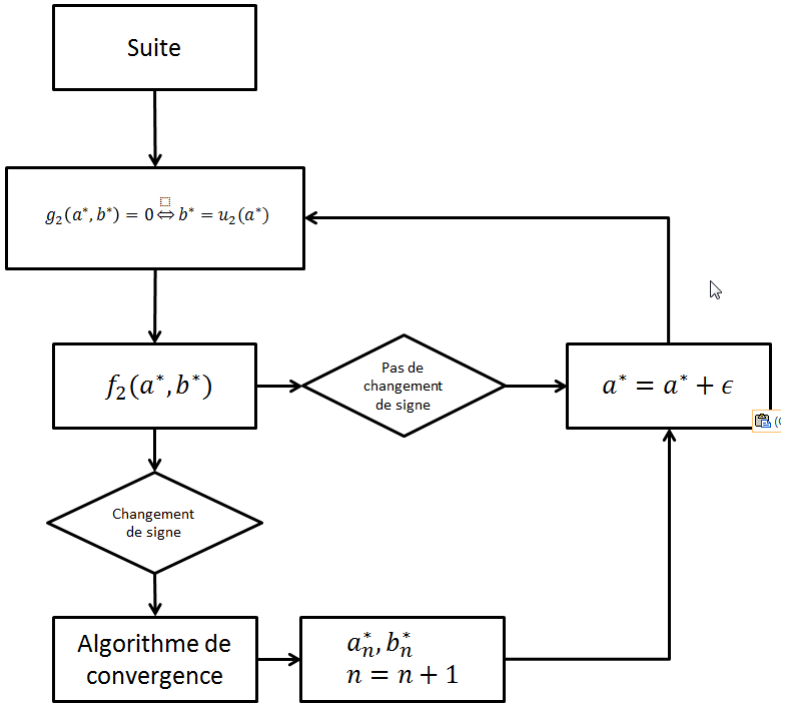


Figure 3-9 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a^* > a_c^*$

La relation d'orthogonalité des fonctions modales est identique que celle d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sous forme matricielle (Han et al., 1999):

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M(\boldsymbol{W_j^*}) d\xi = \delta_{ij}$$

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)] \qquad 3.68$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix}$$

Où $$I^* = \frac{I}{L^4} \qquad 3.69$$

3.8.3 Dimensionnalisation des fonctions modales

Pour dimensionnaliser les fonctions modales il faut théoriquement exprimer les valeurs adimensionnelles en fonction des valeurs dimensionnelles. Une approche différente a été choisie dans le cadre de ce travail qui selon l'auteur est plus simple. Cette approche utilise les relations d'orthogonalité 3.68 pour dimensionnaliser les fonctions modales. Sachant que :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M(\boldsymbol{W_j^*}) d\xi = \delta_{ij}$$

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)]$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix}$$

Il est possible de modifier la relation d'orthogonalité pour pouvoir utiliser des constantes autres que $\rho^* A^*$ et $\rho^* I^*$. La seule contrainte est qu'il faut que le quotient des deux nouvelles constantes soient égales au quotient entre $\rho^* A^*$ et $\rho^* I^*$. Dans ce cas les nouvelles expressions d'orthogonalité peuvent être exprimées tel que suit :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}}.M(\boldsymbol{W_j^*})d\xi = \delta_{ij}$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} const_1 & 0 \\ 0 & const_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix} \quad 3.70$$

De telle sorte que,

$$\frac{const_1}{const_2} = \frac{\rho^* A^*}{\rho^* I^*} = Const \quad 3.71$$

Dans ce travail, la relation d'orthogonalité choisie pour les fonctions modales dimensionnelles est la suivante :

$$\int_0^L (\boldsymbol{W_i})^{\boldsymbol{T}}.M(\boldsymbol{W_j})dx = \delta_{ij} \quad 3.72$$

Avec,

$$M(\boldsymbol{W_i}) = \begin{bmatrix} \rho\, A & 0 \\ 0 & \rho\, I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} W_i(x) \\ PSI_i(x) \end{bmatrix} \quad 3.73$$

Sachant que :

$$\frac{\rho^* A^*}{\rho^* I^*} = \frac{\rho\, A}{\rho\, I} * L^2 \quad 3.74$$

On distribue L^2 aux fonctions modales de déplacement transverse pour obtenir les fonctions modales dimensionnelles. Il faut également remettre les fonctions modales à la bonne échelle selon l'axe longitudinal.

$$W_i(x) = L * W_i^*\left(\frac{\xi}{L}\right) \; avec \; x \in [0, L] \; et \; \xi \in [0,1]$$

$$PSI_i(x) = PSI_i^*\left(\frac{\xi}{L}\right) avec \; x \in [0, L] \; et \; \xi \in [0,1] \quad 3.75$$

Pour finir il faut normaliser les fonctions modales en utilisant la relation d'orthogonalité des fonctions modales 3.72.

CHAPITRE 4 MÉTHODE DES MODES ASSUMÉS

Ce chapitre présente tous les éléments nécessaires pour pouvoir calculer la solution d'un problème de vibration linéaire grâce à la méthode des modes assumés. Il s'agit à nouveau d'un chapitre qui n'entre pas dans les spécificités du problème étudié. Encore une fois, les théories et méthodes présentées ici sont tirées de la littérature, dans le but d'établir au Chapitre 6 la solution spécifique au problème abordé dans le cadre de ce travail.

Le chapitre est divisé en deux parties principales. La première dérive les expressions des matrices de rigidité, de masse et du vecteur des chargements externes qui résultent de la discrétisation du problème et qui compose le système matriciel à résoudre. La deuxième partie se concentre sur la résolution proprement dite du système matriciel.

4.1 Généralités

La méthode des modes assumés est une méthode approximative permettant de discrétiser le problème étudié en un système matriciel en partant des expressions des énergies. Afin de pouvoir l'utiliser il est nécessaire de calculer les expressions des énergies potentielles conservatives, l'énergie cinétique et le travail des chargements externes (Cheng et al., 2006; Mostafavi Yazdi & Irani, 2009). L'énergie potentielle conservative est calculée grâce aux expressions de contraintes-déformations (Berthelot, 1996).

Dans le cas étudié, ces expressions dépendent des déformations transversales de la poutre. La méthode des modes assumés consiste à remplacer les déplacements par une somme linéaire de produits de fonctions spatiales et de fonctions temporelles. Les fonctions spatiales doivent être des fonctions admissibles. Les fonctions admissibles sont des fonctions qui respectent les conditions aux limites du problème étudié. Dans le cadre de cette recherche, les fonctions spatiales utilisées sont des fonctions modales du problème homogénéisé et les fonctions temporelles utilisées sont appelées coordonnées modales et représentent les inconnues du problème. Cette étape transforme le problème en un système matriciel d'équations dont les inconnues sont les coordonnées modales. (Cheng et al., 2006; Mostafavi Yazdi & Irani, 2009). L'homogénéisation mentionnée est illustrée à la fin du chapitre par la Figure 4-1.

Il est très important de comprendre que les fonctions admissibles auraient pu être autres que les fonctions modales d'une poutre, et que théoriquement le problème aurait quand même convergé

vers la solution avec nombre élevé de fonctions. Le fait de choisir des fonctions modales du problème homogénéisé permet d'accroitre la vitesse de convergence vers la solution.

4.2 Expressions des énergies

La matrice des chargements externes est exprimée comme suit :

$$Q_i = \int_0^L f(x,t) W_i(x)\, dx \tag{4.1}$$

Les énergies peuvent être discrétisées en fonction des coordonnées modales q :

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}.\boldsymbol{K}.\boldsymbol{q} \tag{4.2}$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}.\boldsymbol{M}.\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4.3}$$

où $\boldsymbol{q}$ est un vecteur colonne contenant les coordonnées modales et $\boldsymbol{K}$ est la matrice de raideur et $\boldsymbol{M}$ est la matrice de masse.

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

4.2.1 Euler Bernoulli

Dans le cas d'Euler Bernoulli et de Rayleigh le cisaillement et nul et donc :

$$PSI_i(x) = \frac{\partial}{\partial x} W_i(x) \tag{4.5}$$

Et donc les matrices de rigidité et de masse se simplifient comme suit :

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n \tag{4.6}$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho W_i(x) W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad 4.7$$

4.2.2 Rayleigh

Dans le cas de Rayleigh, la matrice de rigidité est identique à celle d'Euler-Bernoulli, mais la matrice de masse possède un terme supplémentaire qui représente l'inertie de rotation :

$$PSI_i(x) = \frac{\partial}{\partial x} W_i(x) \qquad 4.8$$

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad 4.9$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho z^2 \frac{\partial}{\partial x} W_i(x) \frac{\partial}{\partial x} W_j(x) + \rho W_i(x) W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad 4.10$$

4.2.3 Timoshenko

Les matrices de Timoshenko sont différentes de précédentes et valent :

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) \frac{\partial}{\partial x} PSI_j(x) + k' G_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial x} W_i(x) - PSI_i(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} W_j(x) - PSI_j(x) \right) dV \qquad 4.11$$

$$pour\; i,j = 1..n$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho z^2 PSI_i(x) PSI_j(x) + \rho W_i(x) W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad 4.12$$

4.3 Résolution des équations matricielles

Les équations de mouvement couplées sous forme matricielle sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton et les équations de Lagrange.

$$\boldsymbol{M}.\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}.\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \qquad 4.13$$

Afin de résoudre plus facilement ce système matriciel il est utile de découpler les équations. Pour ce faire, les vecteurs propres associés au problème aux valeurs propres sont calculés en premier.

$$(\boldsymbol{K} - {\omega_i}^2\, \boldsymbol{M})\boldsymbol{c_i} = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

où $\boldsymbol{c_i}$ est un vecteur colonne représentant un vecteur propre et $\boldsymbol{c}$ est une matrice carrée contenant les vecteurs propres.

$$\boldsymbol{c_i} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = [\boldsymbol{c_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{c_n}] \tag{4.15}$$

Ce système doit respecter les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\boldsymbol{c_j^T}.\boldsymbol{M}.\boldsymbol{c_i} = \boldsymbol{c_j^T}.\boldsymbol{K}.\boldsymbol{c_i} = 0\ pour\ i \neq j \tag{4.16}$$

Le système matriciel peut désormais être découplé en normalisant les vecteurs propres $\boldsymbol{c_i}$ et en introduisant les coordonnées découplées η_i :

$$\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{c_i}}{\sqrt{\boldsymbol{c_i^T}.\boldsymbol{M}.\boldsymbol{c_i}}} \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}.\boldsymbol{\eta} \qquad \boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{u_n}] \tag{4.18}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{N} \tag{4.19}$$

Avec les matrices $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{N}$ sont définies de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{U^T}.\boldsymbol{K}.\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{U^T}.\boldsymbol{Q} \tag{4.20}$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est une matrice diagonale. De plus, la propriété suivante doit être respectée.

$$\boldsymbol{U^T.M.U = I} \tag{4.21}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. La solution de chaque équation découplée est possède la forme suivante :

$$\eta_i(t) = \eta_i(0)\cos(\omega_i t) + \frac{\dot{\eta}_i(0)}{\omega_i}\sin(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i}\int_0^t N_i(t-\tau)\sin(\omega_i \tau)\ d\tau \tag{4.22}$$

où $\eta_i(0)$ et $\dot{\eta}_i(0)$ sont définis de la manière suivante :

$$\eta_i(0) = \boldsymbol{u_i^T.M.q_0}$$

$$\dot{\eta}_i(0) = \boldsymbol{u_i^T.M.\dot{q}_0} \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{q_0} = [q_1(0) \quad \cdots \quad q_n(0)]$$

En reprenant les notations matricielles (Han et al., 1999):

$$\boldsymbol{w}\ (x,0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{W_i}(x) q_i(0) \tag{4.24}$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité les expressions suivantes sont obtenues (Han et al., 1999) :

$$q_i(0) = \int_0^L \boldsymbol{W_i}(x)\ M\big(\boldsymbol{w}\ (x,0)\big)\ dx$$

$$\dot{q}_\iota\ (0) = \int_0^L \boldsymbol{W_i}(x)\ M\big(\dot{\boldsymbol{w}}\ \ (x,0)\big)\ dx \tag{4.25}$$

Où $$M\big(\boldsymbol{w}\ (x,0)\big) = \begin{bmatrix} \rho\ A & 0 \\ 0 & \rho\ I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} w\ (x,0) \\ \alpha_x(x,0) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Et donc, $$M\big(\dot{\boldsymbol{w}}\ \ (x,0)\big) = \begin{bmatrix} \rho\ A & 0 \\ 0 & \rho\ I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{w}\ (x,0) \\ \dot{\alpha_x}(x,0) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Au plus les modes assumés sont proches des formes modales du problème étudié, au plus la convergence est rapide. Les formes modales utilisées dans cette étude sont obtenues en injectant des valeurs moyennées, ou homogénéisées, du problème dans les différentes théories des poutres. Ces valeurs moyennées sont entre autre, la section moyenne, la masse volumique moyenne et elles sont calculées en pondérant les valeurs de chaque couche à la surface occupée dans la section de la poutre. Le calcul est explicité ci-après :

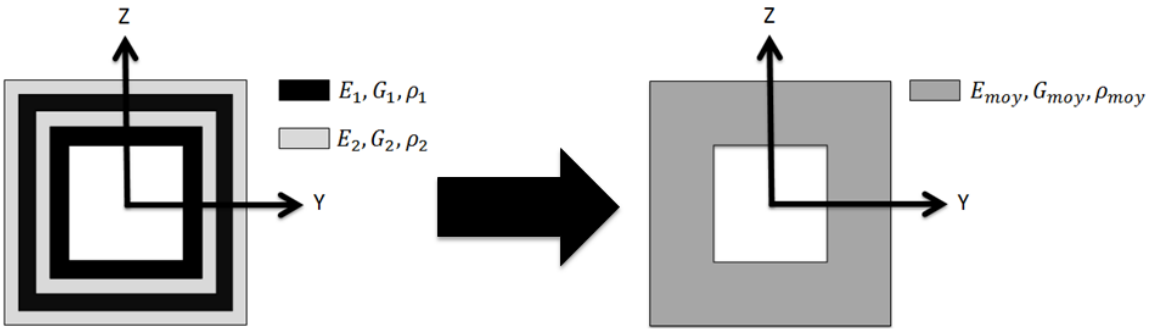


Figure 4-1 : Homogénéisation de la section d'une poutre

$$V_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i * A_i}{\sum_{i=1}^{k} A_i} \qquad 4.28$$

Où V_i représente une donnée de la couche i, tel que la masse volumique, le module de rigidité longitudinal etc. A_i représente l'aire de section de chaque couche.

Il est, à priori, mieux de garder l'aire totale de la section après homogénéisation égale à l'aire totale de la section avant homogénéisation pour ne pas modifier le second moment de surface qui intervient dans les calculs. Cela est relativement intuitif dans le cas d'une section déjà homogène, isotrope et à section creuse. Dans ce cas, l'homogénéisation ne devrait avoir aucun effet sur les résultats si elle est réalisée de la bonne façon. Cependant, si la section creuse était homogénéisée en une section pleine le second moment de surface homogénéisé, le module de Young homogénéisé ainsi que les autres paramètres homogénéisés produiraient de faux résultats.

4.4 Validation de la méthode

La validation des résultats obtenus avec la méthode des modes assumés est très simple. En effet, il faut vérifier que les fréquences propres obtenues pour des poutres homogènes, isotropes et à

section constante grâce à la méthode sont proches des fréquences propres obtenues grâce aux théories des poutres. La méthode de validation est décrite en ANNEXE VI.

CHAPITRE 5 PARTIE EXPÉRIMENTALE

La partie expérimentale est utilisée afin de valider ou contribuer à la validation des résultats théorique. Ce chapitre présente donc les aspects expérimentaux les plus importants qui interviennent dans cette recherche.

Le chapitre est séparé en cinq parties assez diversifiées. La première partie présente le banc d'essais. La deuxième partie traite des courbes d'impacts obtenues avec un marteau instrumenté et de leur lissage. La troisième partie présente la méthodologie de fabrication des poutres en composites qui ont été testées. La quatrième partie présente les caractéristiques des trois poutres en composites construites et qui sont étudiées par la suite. Finalement, la dernière partie traite des résultats expérimentaux obtenus en testant les trois poutres.

5.1 Banc d'essais

Les essais vibratoires sont réalisés sur un banc d'essais métallique de laboratoire. Ce banc d'essais massif dispose de deux plaques mobiles pour simuler un encastrement. Ces deux plaques exercent une force de serrage sur les échantillons par l'intermédiaire de quatre vis et de leurs boulons.

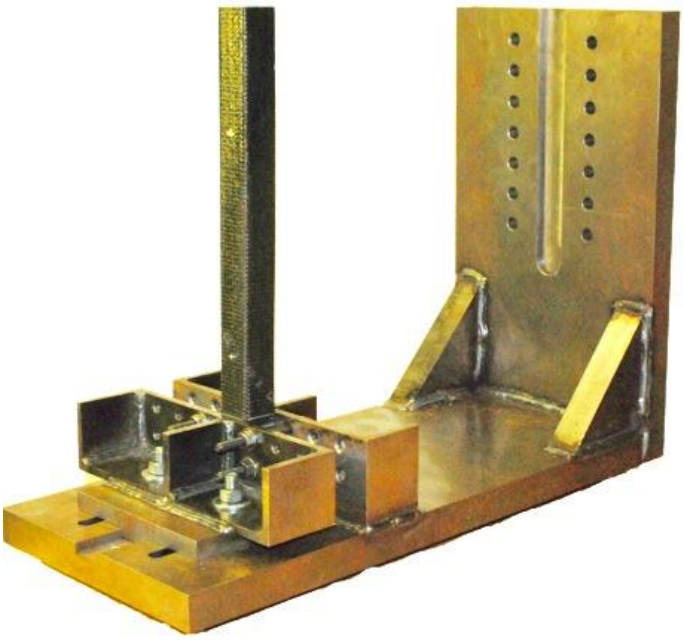


Figure 5-1 : Banc d'essais avec poutre une poutre montée

Le couple de serrage des vis est mesuré grâce à une clef dynamométrique dans les unités impériales. La force de serrage n'est pas calculée explicitement parce que des vis de diamètre et de pas de vis différents ont été utilisées pour les différentes expériences. Cependant, afin de vérifier que la force de serrage était suffisante une étude de convergence a été réalisée en fonction du couple de serrage sur les vis. Dans la suite du rapport, il sera mentionné que les vis sont serrées avec $20\,lb.po$, ce qui correspond à $2.26\,N.m$, ou avec $40\,lb.po$ qui correspond à $4.52\,N.m$.

5.2 Les impacts

Les sous-paragraphes ci-dessous traitent des impacts expérimentaux et des impacts théoriques. Les courbes de force en fonction du temps obtenus grâce au marteau instrumenté représentent les impacts expérimentaux et les courbes de force en fonction du temps que l'on génère de manière informatique et qui sont injectées dans le code pour calculer le comportement transitoire des poutres étudiées représentent les impacts théoriques.

5.2.1 Impacts expérimentaux

Un des objectifs de ce projet est de réussir à simuler le mouvement des poutres étudiées en chaque point suite à un impact possédant une courbe temporelle spécifique. La forme de l'impact utilisé dans les calculs a une influence sur les déformations de la poutre. Expérimentalement, il existe plusieurs formes d'impact. Ces formes sont principalement fonction de la vitesse du marteau instrumenté au moment de l'impact, fonction du type d'embout employé et fonction du matériau sur lequel se produit l'impact. Grâce à des embouts plus durs, la courbe d'impact devient plus étroite et l'amplitude de la force d'impact est plus élevée.

Cependant, en fonction de la configuration utilisée, les courbes d'impacts peuvent aussi avoir des caractéristiques plus subtiles. En effet, un impact causé par un embout dur peut produire une courbe d'impact avec une pente plus raide au début de l'impact en comparaison avec la fin de l'impact.

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en avant les différences entre les courbes d'impact obtenues en fonction des paramètres nommés au début du paragraphe.

Quatre embouts du marteau instrumenté ont été utilisés dans ce projet. Le premier est en caoutchouc rouge, le deuxième en caoutchouc noir, le troisième en plastique blanc et le quatrième en acier inoxydable. Les embouts sont nommés par ordre de dureté croissante. Ce sont des embouts standards dont la réponse en fréquence est normalisée. La caractérisation précise des embouts est donnée dans le manuel d'utilisateur du marteau instrumenté ("PCB Model 086C01," n.d.).

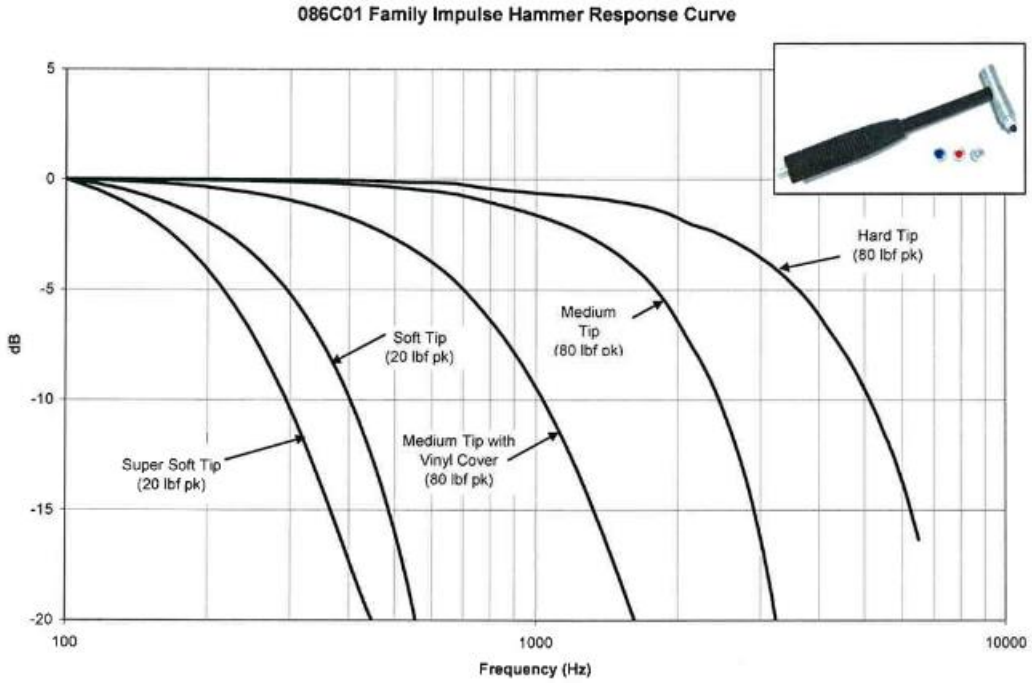


Figure 5-2 : Spécifications des embouts du marteau instrumenté ("PCB Model 086C01," n.d.)

Le tableau ci-dessous renseigne sur la terminologie utilisée dans la Figure 5-2.

Tableau 5.1 : Terminologie de la Figure 5-2

Terminologie de la Figure 5-2			
« Super Soft Tip »	Embout en caoutchouc rouge	« Medium Tip »	Embout de plastique blanc
« Soft Tip »	Embout en caoutchouc noir	« Hard Tip »	Embout en acier inoxydable

Les graphiques contenus dans la Figure 5-3 jusqu' à la Figure 5-6 illustrent de telles courbes générées en frappant sur le banc d'essais sur un point arbitraire avec les quatre types d'embouts et avec des vitesses d'impact différentes. Certaines de ces courbes sont lissées par la suite pour pouvoir les injecter dans le code de calcul. Les impacts ont été produits à la main et les vitesses du marteau avant impact ne sont donc pas identiques entre chaque type d'embout.

Dans le Chapitre 8 une des courbes produites avec l'embout en acier inoxydable sera utilisée pour comparer théoriquement le comportement transitoire de plusieurs poutres entre elles grâce au code de calcul. Le fait d'utiliser une courbe produite en frappant sur un point arbitraire du banc d'essais n'a donc pas d'importance puisque les comportements transitoires théoriques ne sont pas comparés avec des comportements transitoires expérimentaux.

5.2.1.1 Caoutchouc rouge

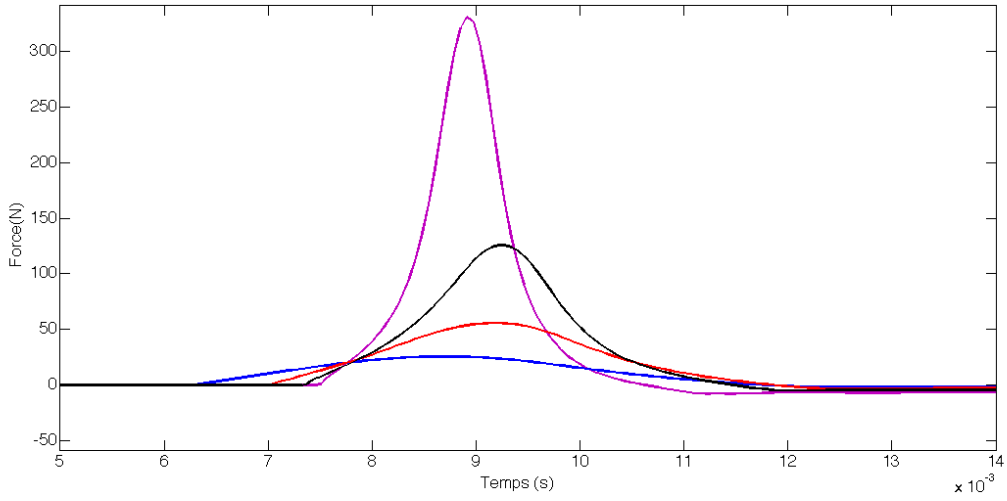


Figure 5-3 : Courbes d'impacts avec l'embout rouge pour plusieurs vitesses d'impact

5.2.1.2 Caoutchouc noir

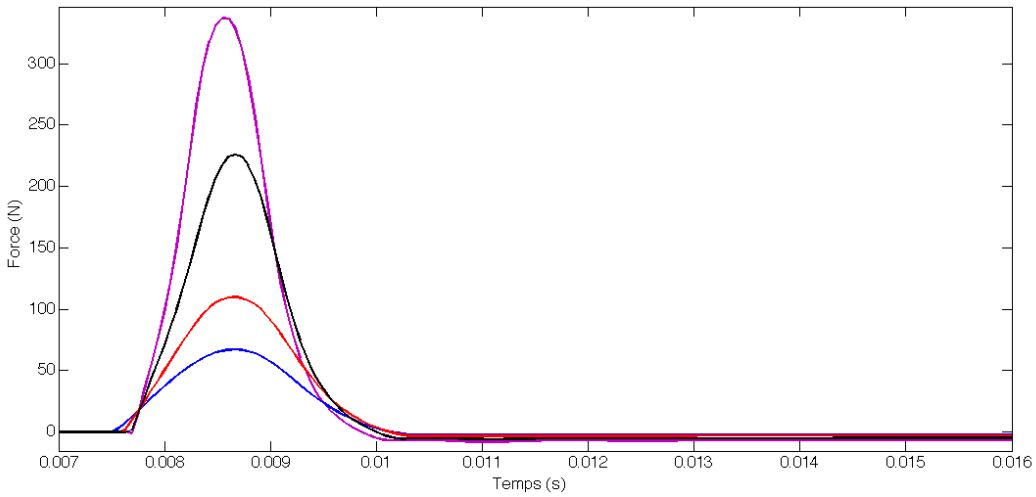


Figure 5-4 : Courbes d'impacts avec l'embout noir pour plusieurs vitesses d'impact

5.2.1.3 Plastique blanc

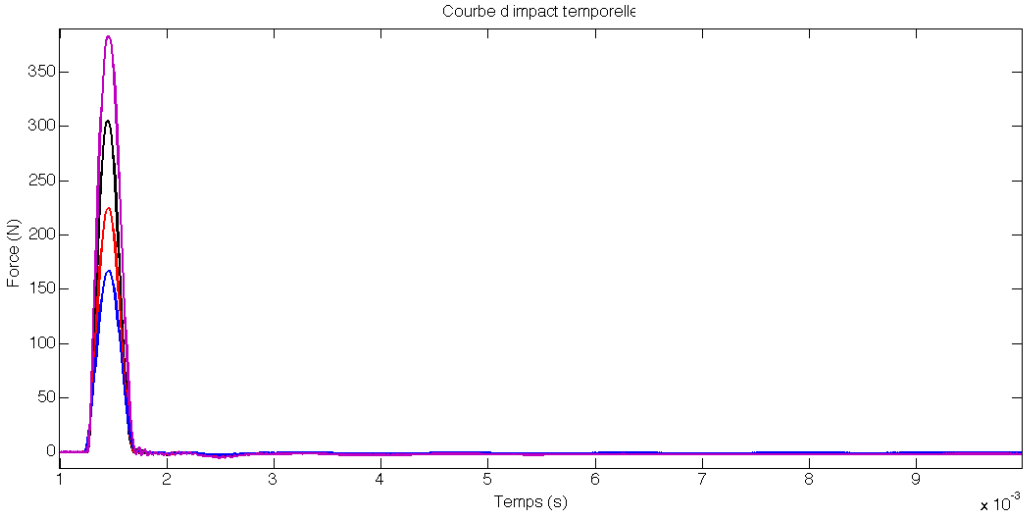


Figure 5-5 : Courbes d'impacts avec l'embout blanc pour plusieurs vitesses d'impact

5.2.1.4 Acier inoxydable

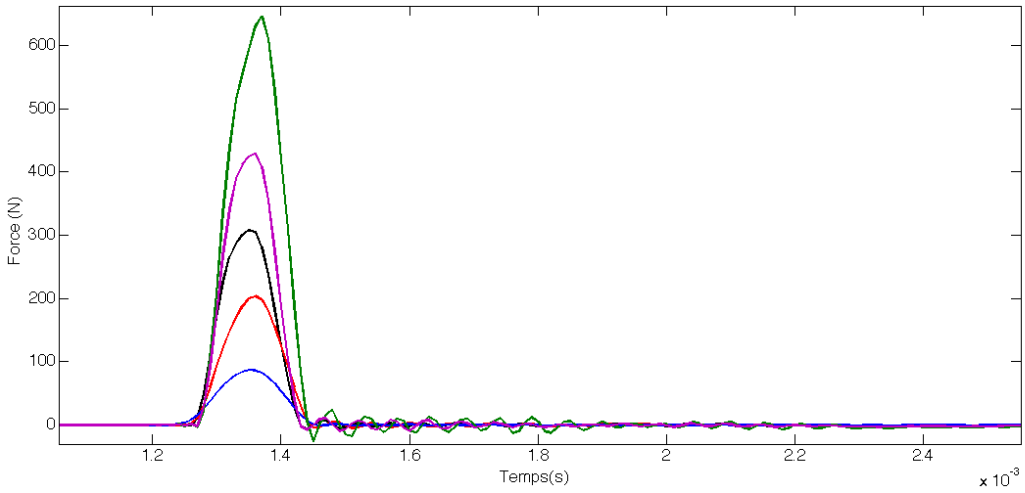


Figure 5-6 : Courbes d'impacts avec l'embout en acier inoxydable pour plusieurs vitesses d'impact

5.2.1.5 Comparaison des courbes d'impacts

Les courbes d'impacts semblent être assez symétriques à première vue. Au plus l'embout est dur, au plus le temps de contact est faible.

On remarque également qu'à la fin des impacts avec des embouts mous les courbes tendent asymptotiquement vers 0 à partir de valeurs négatives de forces. Ceci est probablement causé par le comportement de la cellule piézoélectrique du marteau instrumenté qui tend à atteindre sa valeur d'équilibre de manière asymptotique.

Lorsque les impacts sont réalisés avec des embouts durs, des ondulations apparaissent après impact dont la cause est inconnue. L'hypothèse est faite qu'il s'agit de parasites dans le signal et qu'il faut les éliminer grâce à un traitement de signal.

Les caractéristiques des différents impacts sont exploitées dans l'ANNEXE VII pour réussir à produire des spectres fréquentiels de bonne qualité.

5.2.2 Impacts théoriques

Dans les calculs théoriques, il n'est pas nécessaire de connaître le type d'embout utilisé sur le marteau instrumenté du moment que la courbe d'impact est fournie au modèle. Les fonctions d'impacts utilisées sont des courbes d'impacts expérimentales lissées grâces à une suite de

Fourrier et contiennent une fonction de Dirac spatiale. Les impacts fournis au code de calcul informatique sont donc ponctuels.

L'expression générale d'une série Fourrier est la suivante :

$$f_t(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_f} (a_i * \cos(i * \omega * t) + b_i * \sin(i * \omega * t)) \qquad 5.1$$

$$avec\ t \in [t_{début\ impact}, t_{fin\ impact}]$$

Où n_f est l'ordre de la série. En théorie, au plus n_f est grand au plus lissage s'approche de la courbe expérimentale. Dans le cas d'une courbe d'impact relativement régulière le résultat converge assez rapidement.

La Figure 5-7 à la Figure 5-10 qui suivent sont générées à partir du plus fort impact réalisé avec l'embout en acier inoxydable. Comme expliqué précédemment, lorsque la structure a été impactée par l'embout métallique, des ondulations apparaissent avant et après impact. Il est clair que celles-ci ne représentent pas une force de contact réelle puisqu'elles persistent pendant un temps trop long par rapport à la durée du grand pic. Le signal est traité en mettant les ondulations à zéro. L'hypothèse est faite que les ondulations n'apparaissent pas dans le grand pic d'impact.

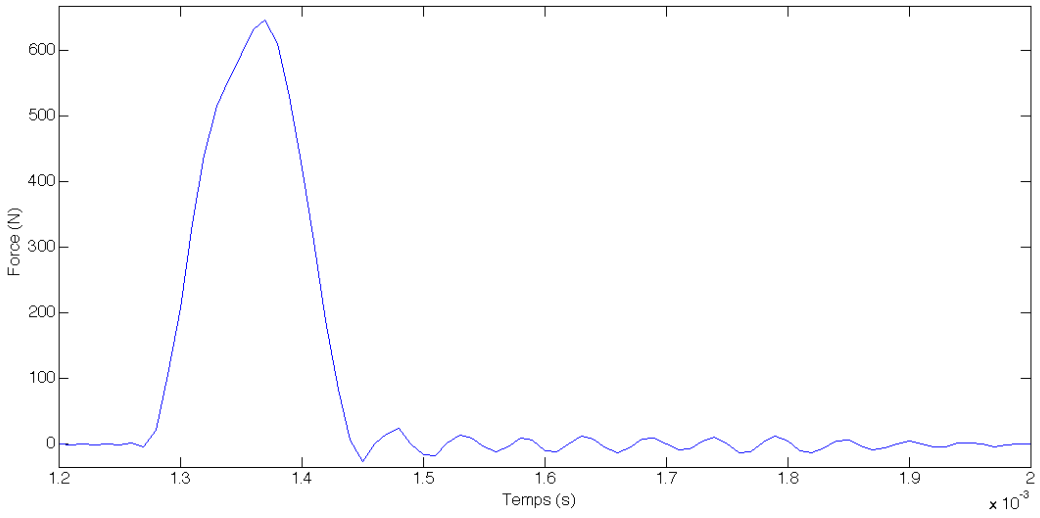


Figure 5-7 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable

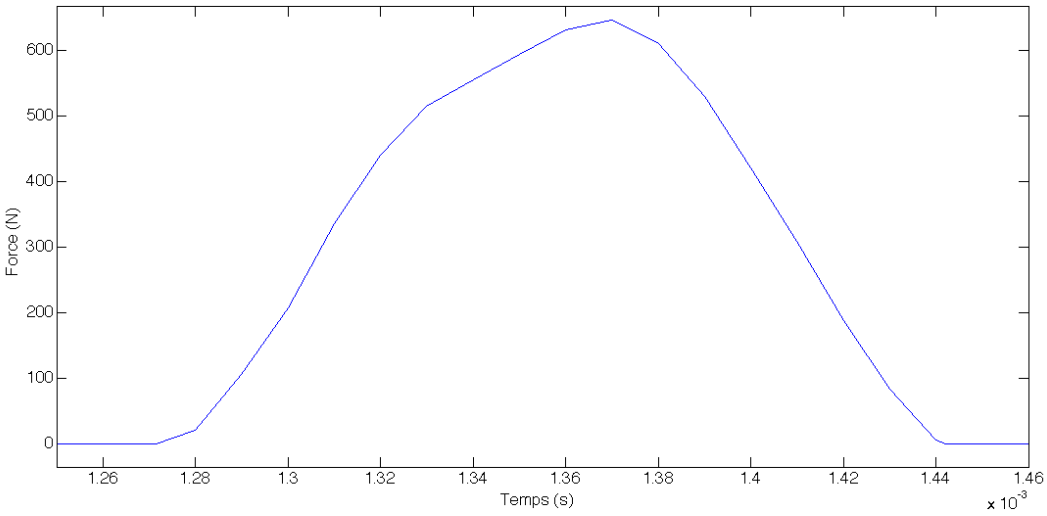


Figure 5-8 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable traitée à lisser

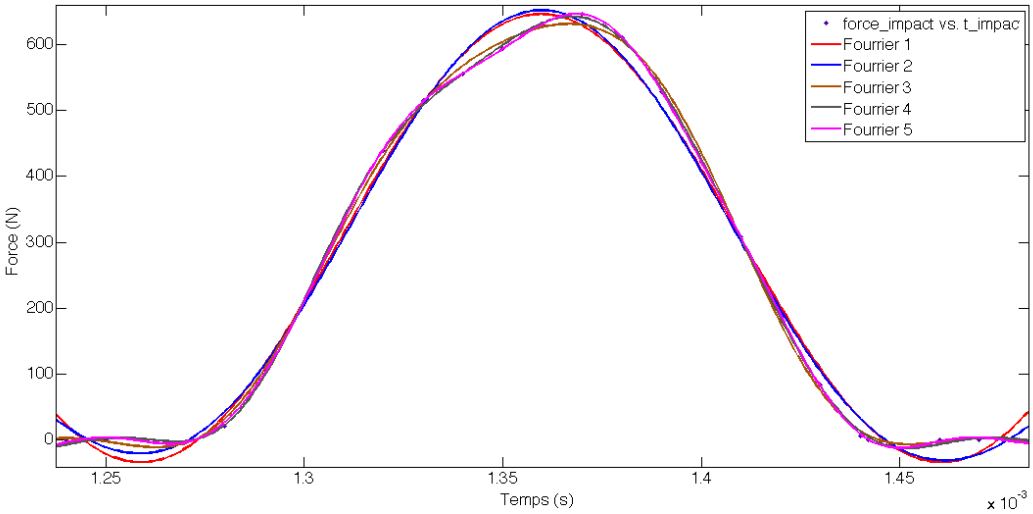


Figure 5-9 : Lissage de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable, interpolée grâce à des séries de Fourrier

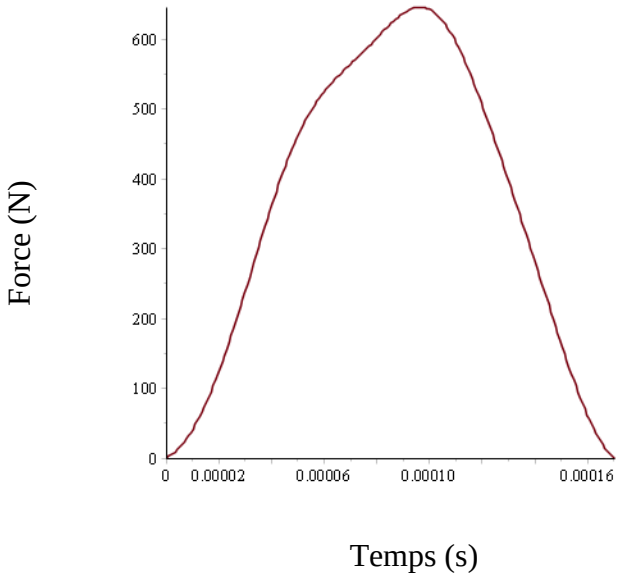


Figure 5-10 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable grâce à une série de Fourrier

La méthode d'lissage marche tout aussi bien pour un impact avec un embout mou qu'avec un embout dur.

5.2.2.1 Manière d'utiliser les techniques d'lissage

Lorsque l'objectif est de valider la réponse transitoire expérimentale avec la réponse transitoire théorique il est nécessaire d'utiliser la même courbe d'impact. Dans ce cas il faut réaliser les essais expérimentaux en premier, récupérer les données sur l'impact et le mouvement de la poutre étudiée et pour finir lisser chacune des courbes d'impacts. Ces courbes d'impacts seront injectées dans le modèle pour simuler le déplacement des points mesurés expérimentalement.

Cependant, lorsque l'objectif est de produire une réponse transitoire à partir d'une courbe d'impact et en ne s'intéressant qu'à la réponse théorique, il est judicieux de choisir une courbe d'impact expérimentale qui servira de référence. Celle-ci peut être traitée et lissée une seule fois et utilisée pour plusieurs simulations.

Il ne faut pas oublier que l'incertitude sur le point d'impact, ainsi que l'impact en réalité non ponctuel ont une influence sur les données expérimentales rendant le processus de validation plus compliqué.

5.3 Construction des poutres

La construction de poutres creuses est un sujet nouveau pour le département du génie mécanique et il a fallu concevoir une nouvelle méthodologie de construction qui reprend certains éléments de base de la construction de stratifiés classiques. Toutes les connaissances requises pour la fabrication des poutres, les produits chimiques à utiliser, les cycles de températures de cuisson ont été enseignées par un collaborateur du département de génie mécanique, Edith Roland Fotsing.

Cette tâche a été réalisée par le stagiaire Vincent Marchal, que le Groupe a accueilli au cours de la session académique d'été 2013. Grâce à son travail 3 poutres exploitables ont été construites dans le but de les utiliser sur le banc d'essais. La rédaction d'un rapport faisait également partie de ses livrables (Marchal, 2013).

Cette section présente en résumé la méthodologie utilisée pour construire les poutres. Si le lecteur désire obtenir plus de détails, il devra se référer au rapport du stagiaire (Marchal, 2013).

Les poutres construites sont constituées de plusieurs plis. Afin de pouvoir enrouler chaque pli l'utilisation d'un mandrin a été incontournable. Suite à plusieurs essais, il a été jugé que le mandrin en question devrait être fabriqué en métal pour pouvoir réutiliser le même mandrin poutre après poutre. Un mandrin en trois parties a été conçu et construit, les deux premières parties étant destinées à être enroulées avec les couches de composites et la troisième pièce étant le mécanisme de desserrage. La Figure 5-11 à la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** illustrent chacune des pièces et leur fonctionnement.

Figure 5-11 : Première partie du mandrin

Figure 5-12 : Deuxième partie du mandrin

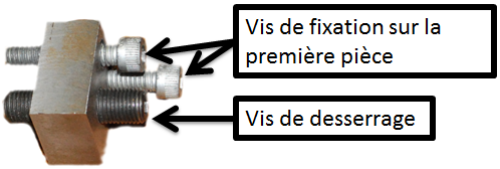


Figure 5-13 : Troisième partie du mandrin

Ainsi, pour enrouler les couches autour du mandrin, la première et la deuxième partie du mandrin doivent d'abord être solidarisées grâce au goujon et à la vis de serrage. Ensuite, les couches doivent être enroulées autour du mandrin, en s'assurant que la vis de serrage ne soit pas couverte par les couches. En effet, si la vis de serrage est couverte par les matériaux composites il sera impossible de désolidariser le système après cuisson.

Pour retirer le mandrin de la poutre après cuisson il faut d'abord retirer la vis de serrage et installer la troisième partie du mandrin sur la première partie grâce aux deux vis de fixation. En vissant la vis de desserrage, cette dernière exerce une force sur la deuxième partie qui se désolidarise de la poutre. La deuxième partie doit être retirée. Suite à cette étape, disposant de plus d'espace de manœuvre, la première partie se désolidarise plus facilement de la poutre et il devient alors possible d'enlever le mandrin au complet de la poutre en composites.

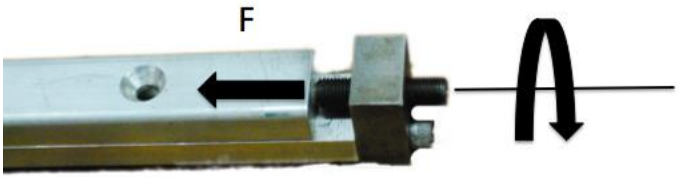


Figure 5-14 : Procédure de désolidarisation du mandrin

Les poutres construites doivent être encastrées à l'une de leurs extrémités. En théorie, un encastrement est un milieu continu avec une grande masse et une grande rigidité. Lorsqu'une une

poutre creuse à section rectangulaire est encastrée, les parois perpendiculaires aux plaques d'encastrement risquent de flamber. Ceci n'est évidemment pas désirable. Il semble donc nécessaire de remplir les poutres creuses par un matériau de renfort sur la longueur de l'encastrement pour que celui-ci reprenne autant que possible les efforts et permettre une force de pression adéquate d'être exercée sur la partie encastrée de la poutre.

La solution adoptée a été de fabriquer des petits segments de résine chargée de billes de verre à l'aide de moules en bois illustrés par la Figure 5-15. Ces segments sont coupés à 5 cm de longueur et meulés pour enlever les défauts de surface et pour obtenir des sections aussi proches que possible à celle du mandrin.

(a) (b)

Figure 5-15 : (a) Segment de résine chargée avant meulage; (b) Moule pour cuisson de la résine chargée.

Les segments de résine et le mandrin sont accotés ensemble pendant l'enroulage des couches, de la manière suivante :

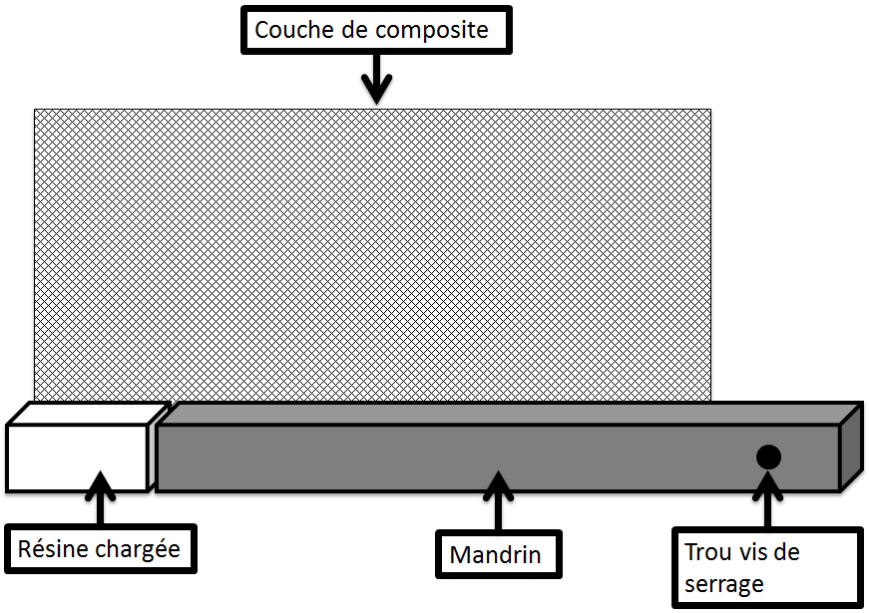


Figure 5-16 : Schémas de fabrication des poutres en composites à section creuse

Une fois que toutes les couches ont été enroulées autour du mandrin une certaine pression doit être maintenue sur la poutre pendant la cuisson. Deux systèmes ont été mis au point conjointement. Le premier système est assez classique. Il faut envelopper la poutre dans une enveloppe plastique résistant à la chaleur communément appelée le « bagging ». Par la suite la poutre est compressée par deux plaques métalliques sur toute sa longueur grâce au contre-moule construit par le stagiaire.

Figure 5-17 : Contre-moule en bois

Le fonctionnement est schématisé par la figure ci-dessous :

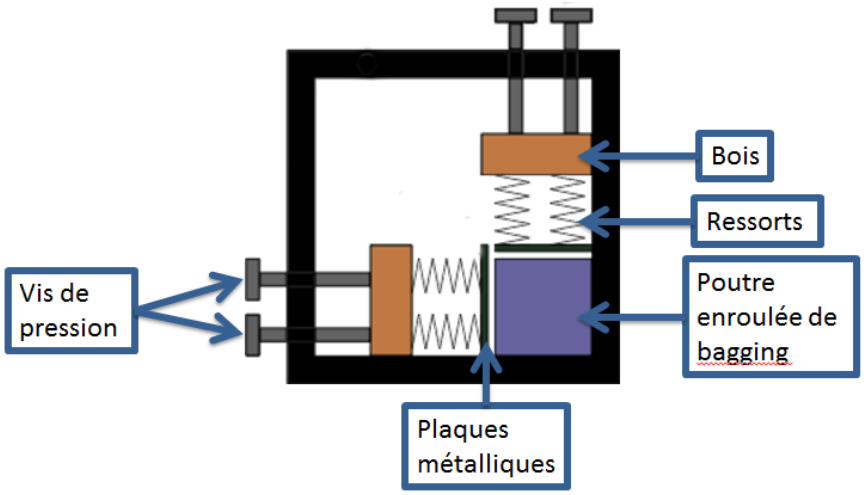


Figure 5-18 : Coupe du contre-moule en bois (Marchal, 2013)

Le fonctionnement est simple. La poutre doit être insérée en premier dans le contre-moule. Il faut par la suite faire glisser les plaques de bois, les plaques métalliques et les ressorts à l'intérieur du contre-moule et autour de la poutre en s'assurant d'abord que les vis sont en position haute. Par la suite les vis doivent être serrées. Il faut qu'il y ait suffisamment de « bagging » à l'extrémité reliée au tuyau de la pompe afin de permettre une certaine maniabilité entre le contre-moule et le tuyau de la pompe à vide. De plus, moins de risques sont encourus de percer le « bagging ».

5.4 Poutres construites

Trois poutres exploitables ont été construites dans le cadre de cette recherche. Les trois possèdent une séquence d'empilement de couches identiques, afin de réaliser une étude de variabilité sur les fréquences propres.

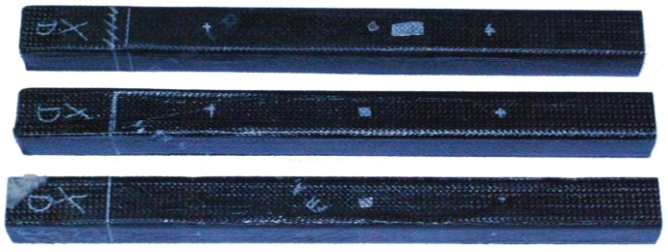


Figure 5-19 : Poutres en composites fabriquées

Chaque poutre possède 4 couches bidirectionnelles de fibres de carbone pré-imprégnées avec de la résine époxy. Ces fibres sont fabriquées par l'entreprise Cytec et le modèle est CYCOM 5276-1 (Cytec, n.d.). Les propriétés connues de ces fibres sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.2 : Propriétés des couches pré-imprégnées

Caractéristiques des couches pré-imprégnées (4 plis)			
E_1	42.8 GPa	$\nu_{1,2}$	0.310
E_2	42.8 GPa	e	$0.8\,mm$
$G_{1,2}$	17.23 GPa	ρ	$1560\,\frac{kg}{m^3}$

La séquence d'empilement de l'intérieur vers l'extérieur des sections des poutres fabriquées est la suivante : 0º/90 º, ±45 º, 0º/90 º, ±45 º.

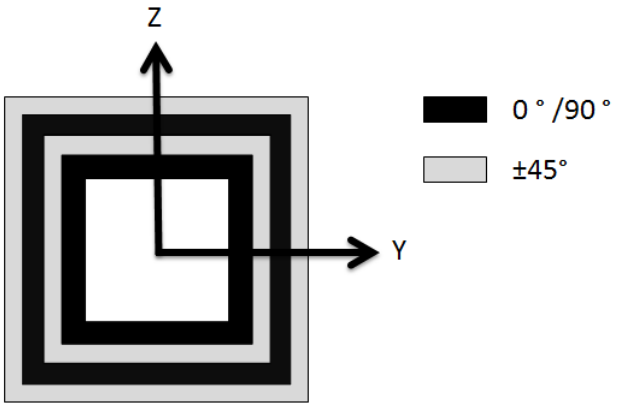


Figure 5-20 : Section d'une poutre en composite avec séquence d'empilement

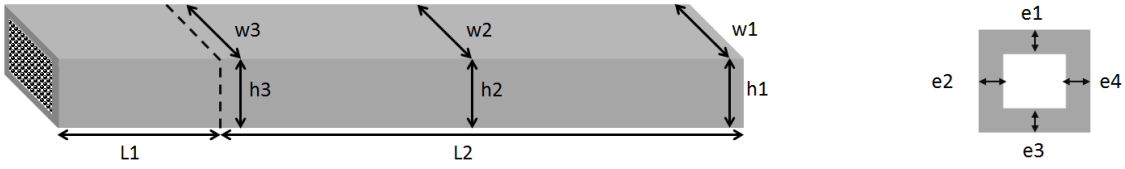
Cette section nécessite l'utilisation des quatre matrices de souplesse développées dans le Chapitre 3, soit les expressions 3.14 et 3.15.

5.4.1 Mesures géométriques des poutres fabriquées

Il est important de mesurer les caractéristiques géométriques des poutres fabriquées pour injecter les données dans le code de calcul et pour valider les résultats. Il n'est cependant pas possible de

mesurer précisément toutes les dimensions géométriques des poutres avec des moyens simples à cause des imperfections de surface. Les dimensions mesurées sont moyennées et ces dernières sont injectées dans le code de calcul pour pouvoir comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

Les figurent ci-dessous illustrent les mesures effectuées sur les trois poutres fabriquées.



(a) (b)

Figure 5-21 : (a) Illustration des prises de mesure externes; (b) Illustration des prises de mesure de la section

Où le volume interne de la poutre le long de L_1 est rempli de résine chargée. Les dimensions $e1, e2, e3$ et $e4$ ont été mesurées à l'extrémité libre des poutres uniquement. Suite à l'installation sur le banc d'essais seule la partie de la poutre le long de L_2 reste à l'air libre. Le Tableau 5.3 contient les mesures effectuées sur chacune des trois poutres.

Les dimensions du Tableau 5.3 ont été moyennées et ces dernières ont été injectées dans le code. Le Tableau 5.4 donne les valeurs moyennées.

Chaque poutre dispose donc de légères variations géométriques. Il faudrait s'attendre donc en conséquence que les résultats varient également quelque peu.

Tableau 5.3 : Mesures géométriques des trois poutres fabriquées

Mesures géométriques des trois poutres fabriquées [mm]			
	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3
L_1	50	50	50
L_2	275	282	281
e_1	0.88	0.90	0.87
e_2	0.95	0.99	1.06
e_3	0.88	0.80	0.87
e_4	0.94	0.85	0.88
h_1	27.30	27.20	27.12
h_2	27.47	27.50	27.14
h_3	27.45	27.92	27.49
w_1	27.28	27.18	27.42
w_2	27.31	27.10	27.66
w_3	27.61	27.19	27.80

Tableau 5.4 : Mesures géométriques des trois poutres fabriquées utilisés dans les calculs

Mesures géométriques des trois poutres fabriquées [mm]					
	Poutre 1	Poutre 2	Différence entre poutre 2 et poutre 1	Poutre 3	Différence entre poutre 3 et poutre 1
L	275	282	2.55%	281	2.18%
e	0.913	0.885	-3.01%	0.92	0.82%
h	27.4	27.5	0.36%	27.25	-0.55%
w	27.4	27.5	0.36%	27.25	-0.55%

5.4.2 État des poutres

Le processus de fabrication est encore sujet à amélioration. En effet, le meulage de la résine, l'empilement des couches et d'autres étapes ne sont pas suffisamment précis et des variations apparaissent entre les différentes poutres. Ce paragraphe présente quelques défauts pour chacune des trois poutres. Certaines entre elles sont illustrées dans la Figure 5-22.

Bien que la forme générale des trois poutres soit satisfaisante, quelques défauts apparaissent aux sections des deux extrémités des trois poutres fabriquées. Ces défauts apparaissent surtout aux coins des sections où les plis sont parfois délaminés. Ceci est sans doute causé par deux choses. Premièrement, la tension de surface appliquée lors de l'enroulage des couches autour du mandrin n'est pas suffisamment élevée et deuxièmement le contre-moule n'applique une pression que sur les surfaces planes des poutres. Les excès de matière se retranchent donc sur les côtés des poutres lors de la cuisson.

De plus, à certains endroits sur les poutres, il y a absence de courbure le long des arrêtes des poutres et la section de la résine chargée à l'encastrement est légèrement différente de la section du mandrin, causant des différences de courbure. En effet, le mandrin possède une section difficile à répliquer à la main sur les résines chargées.

Ces légères variations ne devraient pas causer de variations importantes sur les résultats.

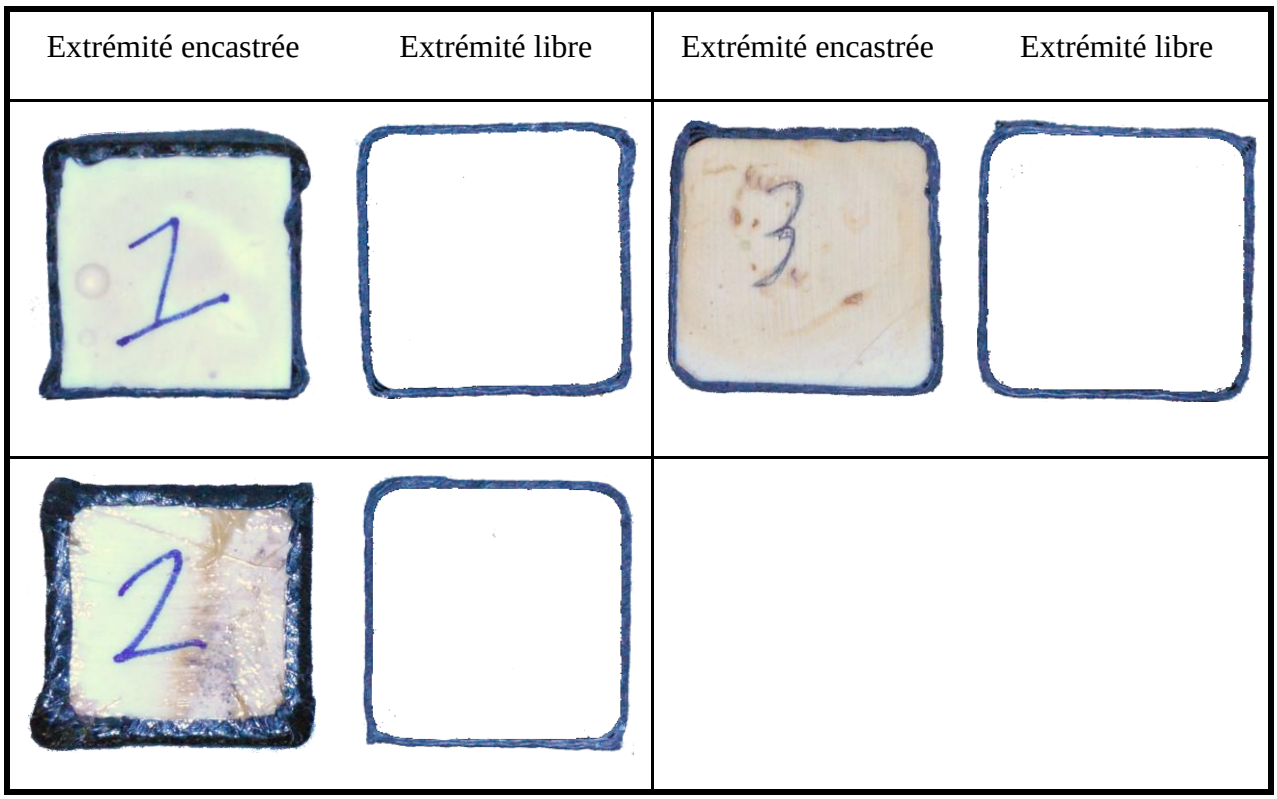


Figure 5-22 : Défauts de section des poutres fabriquées

5.5 Essais vibratoires

Ce paragraphe traite des essais vibratoires effectués sur les trois poutres en composites fabriquées et présentées dans le chapitre précédent. Cependant, afin de vérifier que le banc d'essais donne des résultats en accord avec la théorie, plusieurs essais ont été effectués avec des poutres isotropes tel que décrit dans l'ANNEXE VI. Il a été déterminé que le banc d'essais ne réussissait pas à bien simuler un encastrement parfait pour des poutres isotropes à section creuse. Les valeurs dans le tableau ci-dessous expriment l'écart entre les fréquences propres théoriques de Timoshenko et les fréquences propres expérimentales pour des poutres à section creuse pour des matériaux isotropes.

Tableau 5.5 : Erreur expérimentale causée par les sections creuses et les surfaces non-planes (Tableau vi. 24)

Erreur causée par les sections creuses et les surfaces non-planes [Hz]			
	Erreur poutre 2	Erreur poutre 3	Erreur section creuse
f_1	-9.54%	-11.68%	-10.61%
f_2	-7.90%	-10.47%	-9.19%
f_3	-5.93%	-5.52%	-5.73%

Les fréquences propres expérimentales sont plus faibles que les fréquences propres théoriques, mais les écarts tendent à se réduire avec un numéro de mode croissant.

Il a fallu déterminer si les mesures étaient répétables sur chaque poutre avant de procéder aux mesures expérimentales. Cette analyse est reprise en partie dans l'ANNEXE VII.

5.5.1 Répétabilité des essais sur la première fréquence propre– Influence du moment de serrage

Les mesures de répétabilité ont été effectuées sur la poutre 1 avec l'embout en nylon. Les impacts ont été occasionnés proche de l'encastrement pour éviter les doubles impacts. Les essais ont été réalisés avec deux moments de serrage différents et le montage a été désassemblé et puis réassemblé entre chaque essai. Les figures ont été générées grâce à la fonction « fft » de MATLAB dont l'expression est la suivante :

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)} \qquad 5.2$$

Avec,

$$\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

Les résultats obtenus sont présentés ci-après.

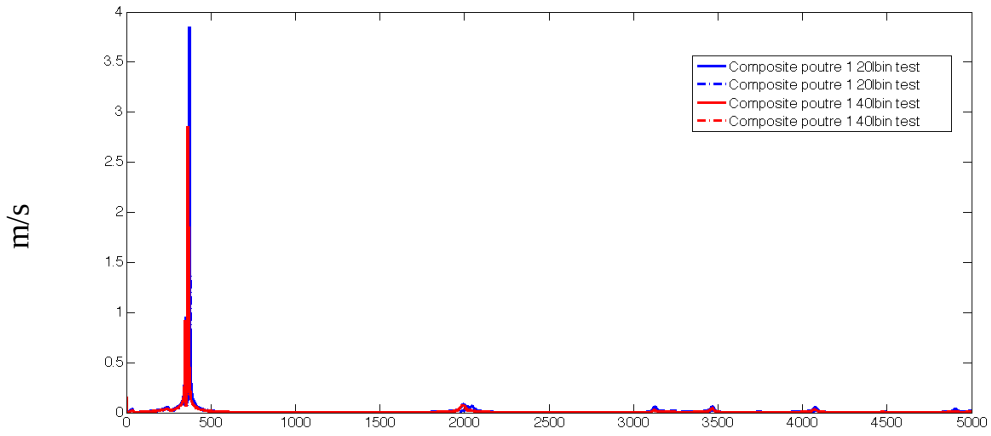


Figure 5-23 : Spectre fréquentiel pour les essais de répétabilité

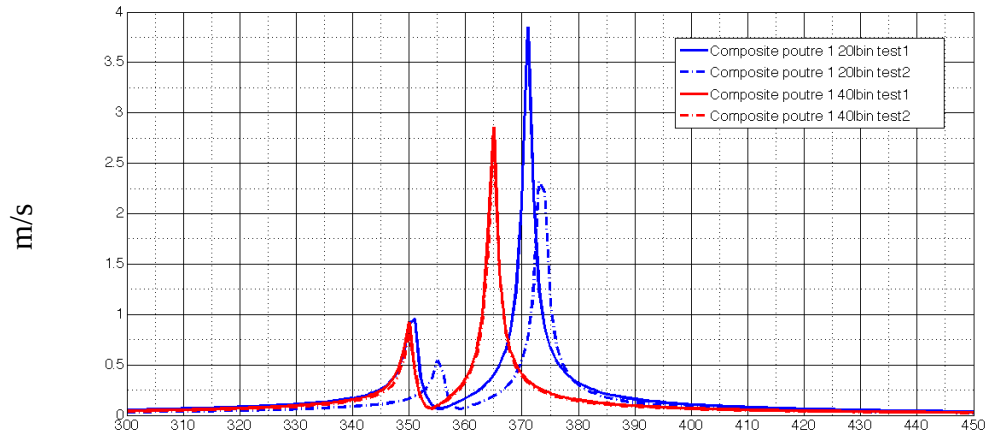


Figure 5-24 : Agrandissement de la Figure 5-23

Les deux courbes bleues générées avec un moment de serrage de 20 lb.po sur les vis, possèdent une légère variation de 5 Hz. Cependant, les deux courbes rouges générées avec 40 lb.po sont identiques. Finalement, la variation maximale entre toutes les courbes est d'environ 10 Hz. Cette variation est probablement due à la variabilité de la position de la poutre sur le banc d'essais. En effet, le positionnement relatif entre la poutre et le banc d'essais s'est fait de manière visuelle. L'origine des doubles pics est inconnue. Le moment de 40 lb.po est utilisé par la suite.

Il est cependant possible d'affirmer que les essais sont répétables puisque le rapport entre la variation de fréquences maximale et la fréquence approximative du grand pic de la Figure 5-23 est de :

$$\frac{\Delta f}{f_{approx}} = \frac{10}{370} = 2.7\% \qquad 5.3$$

5.5.2 Répétabilité des essais sur toute la gamme de fréquences

Les trois poutres en composites ont été fabriquées à la main en utilisant le même processus. Cependant, il y a beaucoup de facteurs pouvant provoquer de la variabilité dans les spectres des poutres testées. Certains de ces facteurs pourraient être la coupe et le meulage des sections en résine chargée pour l'encastrement, la coupe des composites, leur serrage autour du mandrin etc.

La méthode expérimentale décrite en ANNEXE VII est utilisée pour obtenir les fréquences naturelles expérimentales des trois poutres en composites fabriquées.

Deux essais ont été réalisés avec démontage et remontage sur le banc d'essais pour chaque poutre, afin de confirmer la répétabilité des essais. Le moment de serrage des vis du banc d'essais était de 40 lb.po, soit 4.52 N.m, et la sensibilité du vibromètre laser était réglée à $50\frac{mm\ s}{V}$. Dans les paragraphes qui suivent, les résultats des deux essais pour chaque poutre individuelle seront d'abord comparés entre eux. Par la suite, les résultats des trois poutres seront comparés pour déterminer la variabilité par rapport à la fabrication.

Trois figures sont présentées pour la première poutre. La Figure 5-25 trace le contenu fréquentiel entier, la Figure 5-26 le contenu fréquentiel dans la gamme 300 Hz<f<450 Hz et la Figure 5-27 le contenu fréquentiel dans la gamme 1500 Hz<f<5000 Hz.

Les deux essais sur la première poutre ne présentent pas de variabilité. En effet, les fréquences propres de la première poutre pour les deux essais sont en accord. Les essais de répétabilité sont donc concluants. L'ANNEXE XI montre que les essais de répétabilité des deux autres poutres le sont aussi. La sélection des pics fréquentiels est difficile à réaliser puisque plusieurs pics sont présents sur ce qui semble être des fréquences propres uniques. Grâce aux résultats théoriques du Chapitre 6 les pics correspondant aux fréquences propres transverses sont identifiés. Le tableau

qui résumant les fréquences propres transverses des trois poutres est présenté dans le paragraphe suivant.

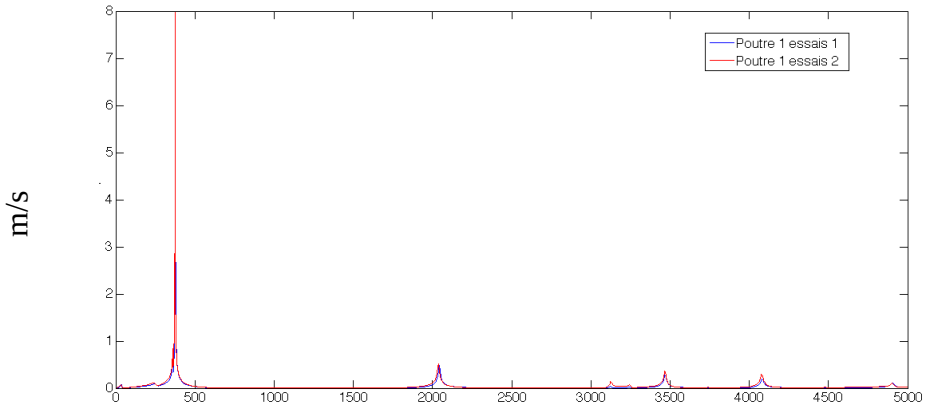


Figure 5-25 : Contenu fréquentiel de la poutre 1

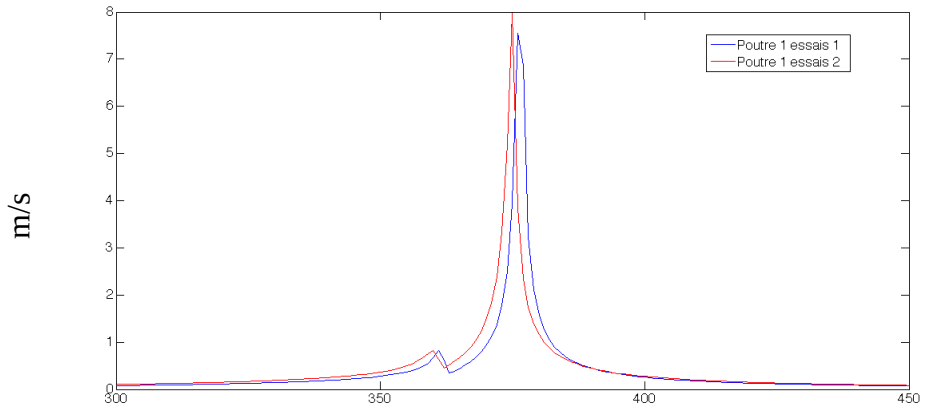


Figure 5-26 : Agrandissement de la Figure 5-25

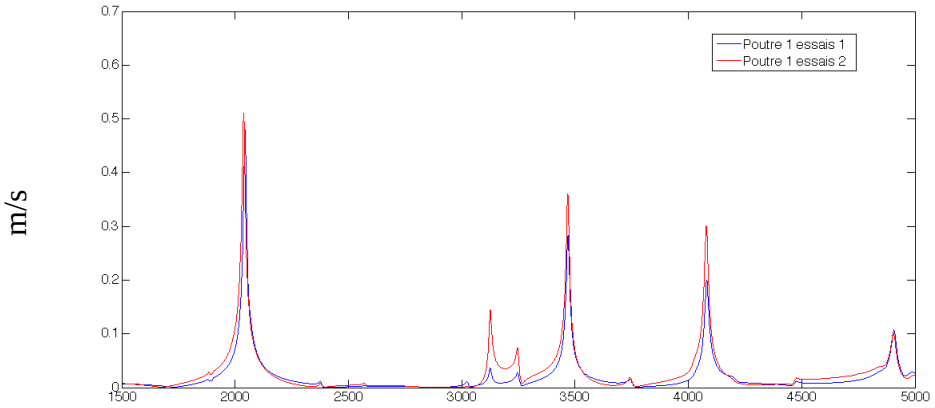


Figure 5-27 : Agrandissement de la Figure 5-25

5.5.3 Comparaison des trois poutres fabriquées

Dans ce paragraphe, un spectre fréquentiel de chaque poutre sont superposés sur les mêmes figures et les fréquences propres transversales expérimentales sont comparées entre elle à la fin du paragraphe.

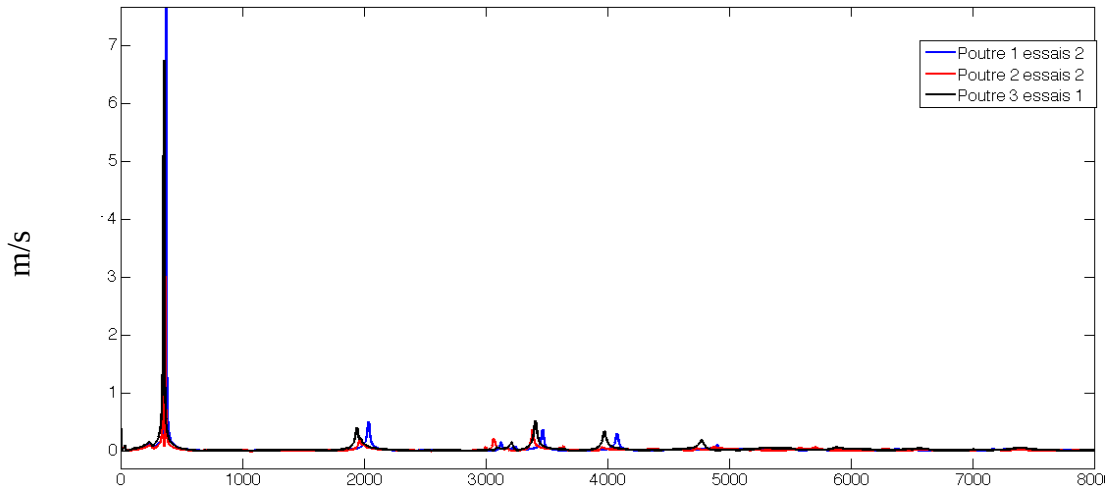


Figure 5-28 : Comparaison des spectres fréquentiels de trois poutres

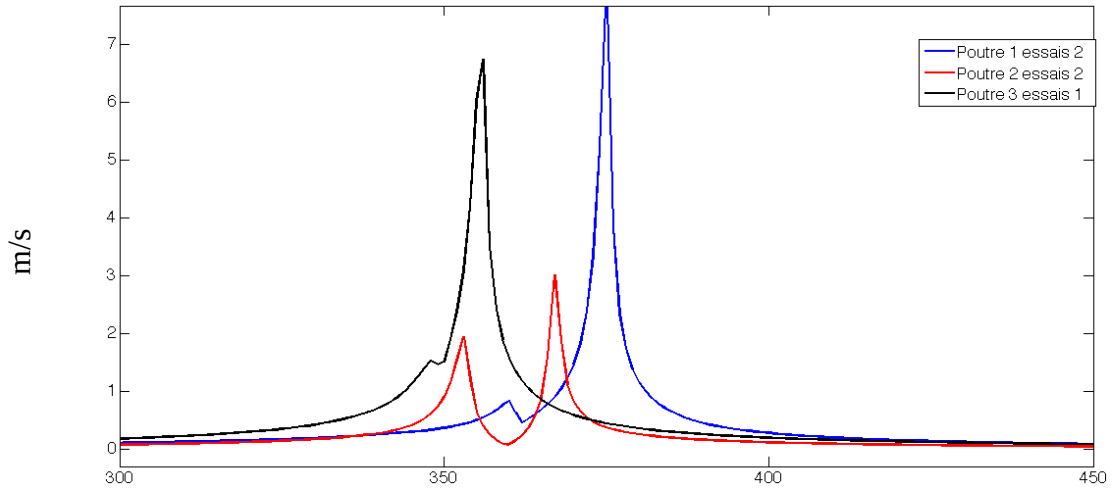


Figure 5-29 : Agrandissement de la Figure 5-28

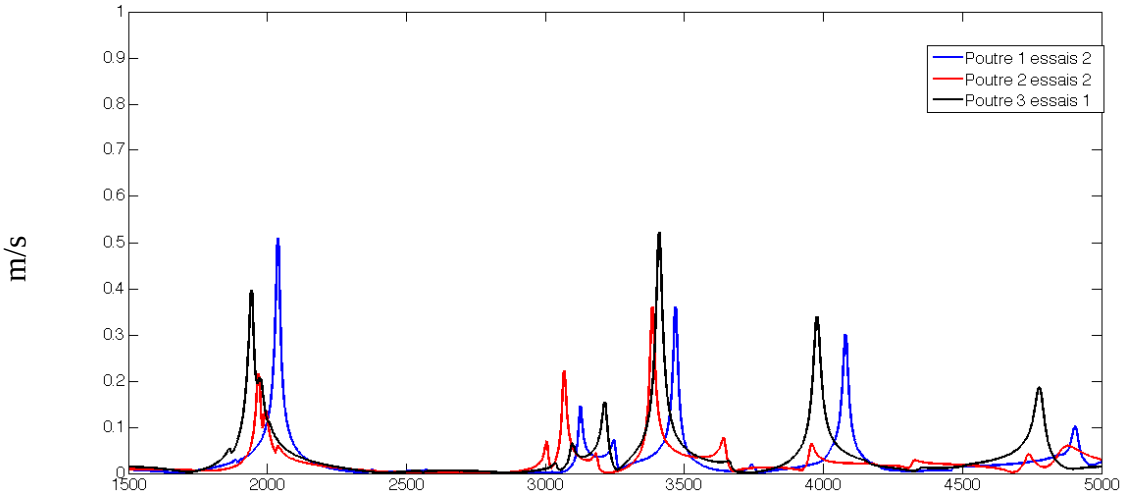


Figure 5-30 : Agrandissement de la Figure 5-28

Tableau 5.6 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 1

Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 1						
Fréquences propres [Hz]	Fréquences expérimentales poutre 1	Fréquences expérimentales poutre 2	Fréquences expérimentales poutre 3	Écart poutre 2 et 1	Écart poutre 3 et 1	Écart poutre 3 et 2
f_1	375.00	367.00	355.50	-2.13%	-5.20%	-3.13%
f_2	2,038.00	1,966.50	1,943.00	-3.51%	-4.66%	-1.20%
f_3	4,905.00	4,734.00	4,776.00	-3.49%	-2.63%	0.89%

5.5.4 Conclusion

Les essais de répétabilité effectués sur les trois poutres en composites sont satisfaisants. En effet, les fréquences propres obtenues lors des deux essais pour la poutre 1 sont quasiment égales et l'allure des graphiques est quasiment identique. Les légères variations sont principalement attribuées à une légère variabilité sur le positionnement relatif des poutres par rapport au banc d'essais.

La variabilité des fréquences naturelles des trois poutres fabriquées est assez importante. Le spectre de la première fréquence propre de la poutre 2 tel qu'illustré sur la Figure 5-29 possède une forme différente des spectres des deux autres poutres. En effet, le premier pic est de la même amplitude que le deuxième et la vallée entre les deux est beaucoup plus prononcée que dans le cas des autres poutres. L'origine de ce double pic pour la première fréquence est inconnue. Les poutres 2 et 3 en composites présentent des fréquences propres généralement plus proches entre elles qu'avec la poutre 1. Ceci est normal puisque la poutre 1 possède une valeur L_2 différente de celles des deux autres poutres.

De par leur séquence d'empilement, les poutres fabriquées ne devraient théoriquement pas posséder de couplage entre les vibrations transverses et les vibrations en torsion. Cependant, des pics fréquentiels correspondant à des modes de torsion peuvent tout de même apparaitre à cause d'une fabrication imparfaite, un impact décentré ou dû à un point de mesure légèrement décentré.

CHAPITRE 6 CAS PARTICULIERS ÉTUDIÉS

Dans ce chapitre le problème des vibrations transverses est résolu pour chacune des trois poutres fabriquées grâce à la méthode des modes assumés. Le chapitre est structuré en trois parties. La première présente certaines considérations théoriques et certaines hypothèses qui sont nécessaires pour pouvoir utiliser le modèle informatique. Une étude de convergence sur les fréquences propres théoriques de la première poutre est effectuée dans la deuxième partie et pour finir la troisième partie présente les écarts entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux pour chaque poutre fabriquée. Le modèle théorique construit est validé grâce à a troisième partie.

6.1 Généralités

Un stratifié classique est formé de plusieurs couches de matériaux composites, ou même homogènes, dont les dimensions dans le plan sont égales mais dont l'épaisseur peut varier d'une couche à l'autre. Ce type de stratifié est aussi décrit comme un stratifié simple dans ce texte.

Une poutre en composites à section creuse rectangulaire se réfère dans ce texte à un imbriquement de sections rectangulaires formée de matériaux composites. Chaque imbriquement est une couche enroulée sur elle-même autour du mandrin. Dans le code, ces couches sont représentées par la figure ci-dessous :

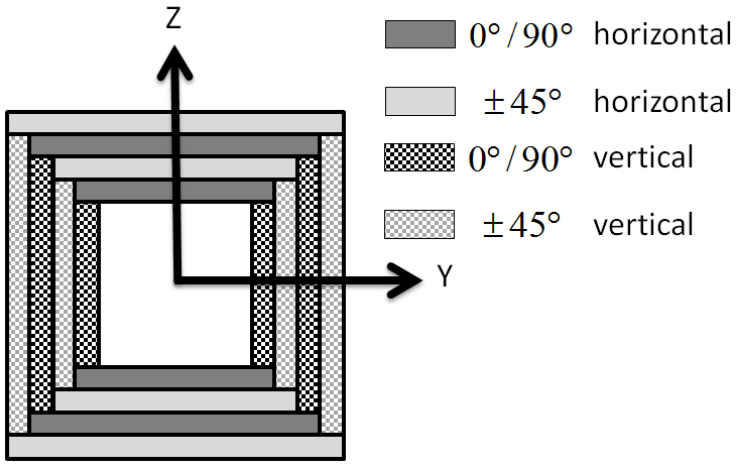


Figure 6-1 : Couches horizontales et verticales avec deux orientations de fibres possibles (Figure 3-6)

La Figure 6-1 illustre une section composées de 4 couches imbriquées l'une sur l'autre. Chaque couche est décomposée en quatre parois du même matériau, mais possédant des matrices de souplesse différentes dans les axes de la poutre.

6.2 Matrices de souplesse

Les informations disponibles sur les couches pré-imprégnées ne suffisent malheureusement pas. En effet, les matrices de souplesse dans les directions principales ci-dessous ne sont pas définies au complet. La matrice de souplesse pour une couche horizontale dont les fibres possèdent une orientation de 0°\90° par rapport à l'axe longitudinal est obtenue ci-dessous en partant de l'expression 3.14 et 3.15 :

$$[\boldsymbol{S}]_{horiz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,2}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,2}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{E_1} & -\frac{v_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{42.8} & -\frac{0.31}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.31}{42.8} & \frac{1}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17.23} \end{bmatrix} * 10^{-9} \qquad 6.1$$

La matrice de souplesse pour une couche horizontale dont les fibres possèdent une orientation de $\pm 45°$ est obtenue en partant de la relation 3.15 :

$$[\boldsymbol{S}']_{\text{horiz}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1}+S_{1,2}+\frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1}+S_{1,2}-\frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1}+S_{1,2}-\frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1}+S_{1,2}+\frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{1,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1}-S_{1,2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1-0.31}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-0.31}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-0.31}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-0.31}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1+0.31}{42.8}\right) \end{bmatrix} * 10^{-9} \qquad 6.2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right) \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

La composante $S'_{3,3}$ de ces matrices n'est pas définie puisque le module de Young selon le troisième axe principal E_3 n'est pas donné dans les spécifications des couches en composite. Cependant, cela ne pose pas de problème puisque pour la théorie des poutres les composantes appartenant à la deuxième et la troisième colonne ainsi que celles appartenant à la deuxième ou

troisième rangée sont éliminées tel qu'illustré par la relation 3.24. La relation 6.1 en conjonction avec la relation 3.24 donne le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{1,1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & S_{4,4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_{5,5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{6,6}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{42.8} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17.23}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} * 10^{-9} \qquad 6.3$$

Où les vecteurs des contraintes et déformations sont exprimés dans les axes de la poutre. De la même manière la relation 6.2 en conjonction avec la relation 3.24 donne le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S'_{1,1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & S'_{4,4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & S'_{5,5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S'_{6,6}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} + \frac{1}{2 * 17.23}\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} * 10^{-9} \qquad 6.4$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{44.306} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.336} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

Cependant un problème persiste. Dans le Chapitre 6 la théorie des poutres sera utilisée afin de calculer les fonctions modales des poutres en composites, bien que l'hypothèse d'isotropie ne soit pas tenue. En effet à la base, les théories des poutres ont été développées pour des matériaux isotropes. Dans les calculs de la théorie de Timoshenko les deux coefficients $S_{xx} = \frac{\epsilon_{xx}}{\sigma_{xx}}$ et $S_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{\sigma_{xz}}$ sont utilisés dans l'expression 3.67 ainsi que dans les expressions de l'énergie potentielle dans la relation 4.11 et ce pour chacune des 4 matrices de souplesse obtenues pour les différents types de parois. Pour les parois horizontales ci-dessus seul S_{xx} est connu tandis que S_{xz} dépend de $G_{1,3}$ qui est une inconnue. Une hypothèse sur la valeur de $G_{1,3}$ est faite dans le Chapitre 6 .

Les équations 6.4 montre que le module de rigidité est plus élevé pour un stratifié bidirectionnel formant $\pm 45°$ avec l'axe de la poutre qu'un stratifié bidirectionnel formant $0°\backslash 90°$ avec l'axe de la poutre. Cependant, l'inverse est vrai pour le module de cisaillement dans le plan.

Le même processus que ci-dessus est effectué pour les parois verticales :

$$[\boldsymbol{S}]_{vertic} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,3} & S_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} \qquad 6.5$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{0.31}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_z} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.31}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17.23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{17.23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

De la même manière que précédemment :

$$[\boldsymbol{S'}]_{vertic} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} \quad 6.6$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} + \frac{1}{2 * 17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} - \frac{1}{2 * 17.23}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_z} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} - \frac{1}{2 * 17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} + \frac{1}{2 * 17.23}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8} + \frac{1}{2 * 17.23}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

Un élément très intéressant apparait à ce stade-ci. Pour les parois verticales, les deux coefficients S_{xx} et S_{xz} sont connus.

Il a été mentionné que la valeur $G_{1,3}$ est nécessaire aux calculs mais il s'agit d'une valeur inconnue. Une approximation est réalisée dont l'expression provient des propriétés de composites unidirectionnels (Mallick, 2008).

$$G_{2,3_{unid}} = \frac{E_{2,2}}{2 * (1 + \nu_{2,3})} \qquad 6.7$$

Dans le cas des composites bidirectionnels étudiés les hypothèses des relations 3.12 sont respectées :

$$E_1 = E_2$$

$$\nu_{1,2} = \nu_{2,1}$$

$$G_{1,3} = G_{2,3}$$

$$\nu_{1,3} = \nu_{2,3}$$

L'expression 6.7 se simplifie donc de la manière suivante :

$$G_{1,3} = G_{2,3_{unid}} = \frac{E_{2,2}}{2 * (1 + \nu_{2,3})} = \frac{E_{1,1}}{2 * (1 + \nu_{1,2})} \quad 6.8$$

$$\Leftrightarrow G_{1,3} = 16.33 * 10^9\ Pa$$

En complétant le Tableau 5.2 avec cette nouvelle valeur on obtient :

Tableau 6.1 : Caractéristiques des couches pré-imprégnées (4 plis) – Tableau complété

E_1	42.8 GPa	$\nu_{1,2}$	0.310	$G_{1,3}$	16.33 GPa
E_2	42.8 GPa	e	0.8 mm		
$G_{1,2}$	17.23 GPa	ρ	1560 $\frac{kg}{m^3}$		

Les matrices de souplesse des relations 6.1, 6.2, 6.5 et 6.6 deviennent donc :

$$[\boldsymbol{S}]_{horiz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{42.8} & -\frac{0.31}{42.8} & -\frac{\nu_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.31}{42.8} & \frac{1}{42.8} & -\frac{\nu_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{1,3}}{42.8} & -\frac{\nu_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17.23} \end{bmatrix} * 10^{-9} \quad 6.9$$

$$[\boldsymbol{S'}]_{\text{horiz}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right) \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

$$[\boldsymbol{S}]_{vertic} = \begin{bmatrix} \frac{1}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & -\frac{0.31}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_z} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.31}{42.8} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16.33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

$$[\boldsymbol{S'}]_{vertic} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{10^9}{E_z} & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}-\frac{1}{2*17.23}\right) & -\frac{v_{1,3}}{42.8} & \frac{1}{2}\left(\frac{0.69}{42.8}+\frac{1}{2*17.23}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1.31}{42.8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10^9}{G_{xz}} \end{bmatrix} * 10^{-9}$$

Chacune de ces matrices de souplesse résulte donc à des coefficients de rigidité différents dans les axes de la poutre. Voici un tableau récapitulatif des modules pour les 4 cas de figures possibles :

Tableau 6.2 : Modules de rigidité pour les couches horizontales et verticales et pour les deux orientations de fibres

Couche horizontale				Couche Verticale			
0°\90°		±45°		0°\90°		±45°	
E_x	42.80	E_x	44.31	E_x	42.80	E_x	44.31
G_{xy}	17.23	G_{xy}	16.34	G_{xy}	16.33	G_{xy}	16.33
G_{xz}	16.33	G_{xz}	16.33	G_{xz}	17.23	G_{xz}	16.34

Les couches horizontales d'orientation $\pm 45°$ présentent un module de rigidité longitudinal supérieur aux couches d'orientation $0°/90°$, mais un module de rigidité en cisaillement dans le plan plus faible. De plus, avec l'hypothèse qui a été faite sur la valeur de $G_{1,3}$, le module de rigidité en cisaillement transversal est toujours plus faible que les modules de rigidité en cisaillement dans le plan pour les deux types d'orientation.

La comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux est réalisée à la fin du chapitre. Elle permettra d'en tirer des informations pertinentes sur la variabilité de fabrication, la précision des résultats etc.

Ce chapitre comprend l'étude de six cas différents. Des simulations sont réalisées grâce à la méthode des modes assumés avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et la théorie des poutres de Timoshenko pour chacune des trois poutres en composites fabriquées. Ces six cas sont résumés dans le Tableau 6.3.

Il existe deux différences dans le code de calcul entre la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko. La première différence est bien évidemment au niveau des fonctions modales utilisées et la seconde est la manière dont les matrices de masse et de rigidité sont calculées. Les expressions des matrices sont données en rappel dans les paragraphes appropriés.

Tableau 6.3 : Résumé des cas étudiés

Numéro de cas	Numéro de poutre	Théorie utilisée
1	1	Euler-Bernoulli
2	1	Timoshenko
3	2	Euler-Bernoulli
4	2	Timoshenko
5	3	Euler-Bernoulli
6	3	Timoshenko

Dans la suite de ce chapitre, des références sont faites aux fréquences propres analytiques et aux fréquences propres approximatives. Celles-ci font référence aux fréquences propres calculées grâces aux théories analytiques et grâce à la méthode des modes assumés respectivement. Ces fréquences propres peuvent bien sûr être calculées grâce à la théorie de Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

6.3 Étude de convergence du cas 1 et du cas 2

Une étude de convergence est réalisée sur la poutre 1 par rapport au nombre de modes nécessaires pour atteindre la convergence sur la cinquième fréquence propre approximative. Le choix s'est porté sur la cinquième fréquence propre afin d'avoir suffisamment de fréquences pour pouvoir comparer les cas de simulation entre eux et parce qu'il n'est pas possible d'extraire plus de trois fréquences propres expérimentales des spectres fréquentiels des poutres en composites.

6.3.1 Cas 1

6.3.1.1 Généralités

En reprenant les équations 4.6 et 4.7 des matrices de masse et de rigidité pour la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho W_i(x) W_j(x)\, dV \;\; pour\; i,j = 1..n$$

Dans le cas de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, l'orthogonalité est vérifiée si l'expression suivante est vérifiée :

$$\int_0^L \rho * A * W_i\,(x) * W_j\,(x)\, dx = \delta_{ij} \;\; pour\; i,j = 1..n$$

Numériquement pour calculer l'erreur sur l'orthogonalité, la relation suivante est utilisée :

$$\int_0^L \rho * A * W_i\,(x) * W_j\,(x)\, dx - \delta_{ij} = Erreur_{i,j}\; pour\; i,j = 1..n \qquad 6.10$$

Dans le cas d'Euler-Bernoulli il est possible de normaliser les fonctions modales sans le coefficient $\rho * A$, du moment que les expressions des conditions initiales soient modifiées.

6.3.1.2 Résultats

Le Tableau 6.4 illustre les résultats de l'étude de convergence en fonction du nombre de modes utilisés. Les cinq premières fréquences ont convergé avec 5 modes et les écarts entre les fréquences propres analytiques et approximatifs sont très faibles.

Tableau 6.4 : Étude de convergence pour la poutre 1 grâce à Euler-Bernoulli [Hz]

Fréquence propre théorique	Fréquences propres analytiques	Nombre de modes			Écart entre analytique et 20 modes
		5	10	20	
f_1	431.93	431.99	431.99	431.99	0.01%
f_2	2,706.84	2,707.25	2,707.25	2,707.25	0.02%
f_3	7,579.24	7,580.37	7,580.37	7,580.37	0.01%
f_4	14,852.29	14,854.50	14,854.50	14,854.50	0.01%
f_5	24,551.90	24,555.55	24,555.55	24,555.55	0.01%

6.3.2 Cas 2

6.3.2.1 Généralités

En reprenant les équations 4.11 et 4.12 des matrices de masse et de rigidité pour la théorie des poutres de Timoshenko :

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) \frac{\partial}{\partial x} PSI_j(x) + k' G_{x,z} \left(\frac{\partial}{\partial x} W_i(x) - PSI_i(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} W_j(x) - PSI_j(x) \right) dV$$

$$pour\ i,j = 1..n$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho z^2 PSI_i(x) PSI_j(x) + \rho W_i(x) W_j(x)\, dV \ \ pour\ i,j = 1..n$$

Dans le cas de la théorie des poutres de Timoshenko, l'orthogonalité est vérifiée si l'expression suivante est vérifiée :

$$\int_0^L (\boldsymbol{W_i})^{\boldsymbol{T}}.M(\boldsymbol{W_j})dx = \delta_{ij}\ pour\ i,j = 1..n$$

$$(\boldsymbol{W_i})^{\boldsymbol{T}} = [W_i(x) \quad PSI_i(x)]$$

$$M(\boldsymbol{W_i}) = \begin{bmatrix} \rho\, A & 0 \\ 0 & \rho\, I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} W_i(x) \\ PSI_i(x) \end{bmatrix}$$

Numériquement pour calculer l'erreur sur l'orthogonalité, la relation 6.10 est utilisée à nouveau :

$$\int_0^L (\boldsymbol{W_i})^{\boldsymbol{T}}.M(\boldsymbol{W_j})dx - \delta_{ij} = Erreur_{i,j}\ pour\ i,j = 1..n$$

Dans le cas de Timoshenko il est possible de normaliser les fonctions modales avec d'autres coefficients que $\rho * A$ et $\rho * I$ du moment que le quotient de ces deux coefficients soit égal au quotient de $\rho * A$ et $\rho * I$ et que les expressions des conditions initiales soient adaptées :

$$\frac{\rho * A}{\rho * I} = Const \qquad 6.11$$

soit,
$$M(\boldsymbol{W_i}) = \begin{bmatrix} const_1 & 0 \\ 0 & const_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} W_i(x) \\ PSI_i(x) \end{bmatrix} \qquad 6.12$$

$$\frac{const_1}{const_2} = Const \qquad 6.13$$

6.3.2.2 Résultats

Tableau 6.5 : Étude de convergence en fréquence pour la poutre 1 grâce à Timoshenko

Fréquence propre théorique	Fréquences propres analytiques	Nombre de modes			Écart entre analytique et 20 modes
		5	10	20	
f_1	421.09	421.15	421.15	421.15	0.01%
f_2	2,318.67	2,318.94	2,318.94	2,318.94	0.01%
f_3	5,600.34	5,600.86	5,600.86	5,600.86	0.01%
f_4	9,397.71	9,398.41	9,398.41	9,398.41	0.01%
f_5	13,446.94	13,447.77	13,447.77	13,447.77	0.01%

Les résultats semblent avoir déjà convergé avec 5 modes et les écarts entre les fréquences propres analytiques et approximatifs sont très faibles. Cinq modes sont donc suffisants pour calculer avec précision les 5 premières fréquences propres approximatives pour les deux théories de poutres. Les simulations qui suivent sont effectuées avec 5 modes également.

Les résultats théoriques analytiques et approximatifs sont donc en accord.

6.4 Comparaison entre les résultats approximatifs et les résultats du banc d'essais

Dans les paragraphes qui suivent les fréquences propres approximatives des différents cas sont comparés entre eux et avec les fréquences expérimentales obtenues dans le chapitre 3. Les conclusions se trouvent à la fin du chapitre.

6.4.1 Poutre 1

Tableau 6.6 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 1

Fréquences propres [Hz]	Poutre 1 E-B	Poutre 1 Timoshenko	Différence entre E-B et Timoshenko	Fréquences expérimentales	Erreurs entre l'expérimental et Timoshenko
f_1	431.99	421.15	-2.51%	375	-10.96%
f_2	2,707.25	2,318.94	-14.34%	2038	-12.12%
f_3	7,580.37	5,600.86	-26.11%	4905	-12.42%
f_4	14,854.50	9,398.41	-36.73%	\	\
f_5	24,555.55	13,447.77	-45.24%	\	\

6.4.2 Poutre 2

Tableau 6.7 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 2

Fréquences propres [Hz]	Poutre 2 E-B	Poutre 2 Timoshenko	Différence entre E-B et Timoshenko	Fréquences expérimentales	Erreurs entre l'expérimental et Timoshenko
f_1	412.77	402.81	-2.41%	367	-8.89%
f_2	2,586.78	2,227.59	-13.89%	1966.5	-11.72%
f_3	7,243.06	5,399.17	-25.46%	4734	-12.32%
f_4	14,193.51	9,085.15	-35.99%	/	/
f_5	23,462.89	13,024.85	-44.49%	/	/

6.4.3 Poutre 3

Tableau 6.8 : Comparaison des fréquences propres approximatives et expérimentales pour la poutre 3

Fréquences propres [Hz]	Poutre 3 E-B	Poutre 3 Timoshenko	Différence entre E-B et Timoshenko	Fréquences expérimentales	Erreurs entre l'expérimental et Timoshenko
f_1	411.29	401.50	-2.38%	355.5	-11.46%
f_2	2,577.50	2,223.66	-13.73%	1943	-12.62%
f_3	7,217.09	5,396.26	-25.23%	4776	-11.49%
f_4	14,142.61	9,089.10	-35.73%	/	/
f_5	23,378.74	13,039.45	-44.23%	/	/

6.5 Conclusions

Les fréquences propres approximatives de Timoshenko sont systématiquement plus faibles que les fréquences correspondantes d'Euler-Bernoulli. Ceci est en accord avec la littérature (Han et al., 1999). Cet écart est d'autant plus grand que le numéro de mode étudié est élevé. Pour le cinquième mode, par exemple, la fréquence propre approximative de Timoshenko est de l'ordre de 40 % plus faible que la cinquième fréquence propre approximative d'Euler-Bernoulli pour chacune des trois poutres. Ceci est expliqué par le fait que la théorie de Euler-Bernoulli ne prend en compte ni l'inertie de rotation ni le cisaillement transversal.

Les fréquences expérimentales semblent être systématiquement plus faibles d'au moins 9 % par rapport aux fréquences propres approximatives de Timoshenko. Il faut se souvenir cependant que, comme le Chapitre 5 l'indique, il est difficile d'être certain de la valeur des fréquences expérimentales puisque plusieurs pics fréquentiels sont présents. De plus, comme le démontre l'ANNEXE VI, le banc d'essais n'arrive pas à simuler un encastrement parfait pour des poutres creuses. Dans le cas de poutres creuses fabriquées avec un matériau isotrope, tel que l'aluminium,

les écarts entre les résultats approximatifs et expérimentaux sont de l'ordre de 9% plus faible pour le premier mode et de l'ordre de 5.5% plus faible pour le troisième mode. Deux causes ont été identifiées provocant ces écarts, la première étant une longueur d'encastrement non suffisante et la deuxième étant une poutre ne possédant pas une section pleine à l'encastrement. Il est donc probable qu'une grande partie des écarts entre les résultats approximatifs et expérimentaux des poutres creuse en composites provienne du fait que les essais ont été réalisés avec ce même banc d'essais. Bien que les poutres en composite possèdent une section pleine à l'encastrement, le matériau avec lequel elles sont remplies, de la résine chargée, ne possède pas une rigidité similaire à celle du banc d'essais. L'autre partie des écarts est bien sûr attribuable au modèle théorique construit. Malheureusement, il n'a pas été possible de quantifier précisément les écarts provoqués par chaque cause séparément puisqu'un seul type de poutres a été construit.

CHAPITRE 7 ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Ce chapitre présente une analyse de sensibilité fonction de la valeur du module de cisaillement transversal des couches en composites. Cette analyse est effectuée sur la poutre 1. Les fréquences propres théoriques calculées grâce à plusieurs valeurs du module de cisaillement transversal sont présentées sur la même figure que les fréquences propres expérimentales. Par la suite, la variation des fréquences propres pour les cinq premiers modes est étudiée en fonction du module de cisaillement transversal.

Une approximation sur la valeur de $G_{1,3}$ a été réalisée à l'aide de l'expression 6.7. Il se peut que cette approximation ne se rapproche pas de la valeur réelle. Il est donc nécessaire de vérifier si une légère variation de cette valeur influence de manière drastique ou non les résultats des calculs. La base de comparaison dans l'étude de sensibilité est la fréquence propre pour les 5 premiers modes. L'étude de sensibilité a été effectuée sur la poutre 1 en composites.

Pour ce faire, la valeur de $G_{1,3}$ subit une variation de 10% vers des valeurs plus faibles et 10% vers des valeurs plus élevées avec un pas de 1%.

Les résultats ont été transférés dans le logiciel Excel et les résultats sont analysés grâce à la Figure 7-1 jusqu'à la Figure 7-4. La première figure illustre les trois premières fréquences propres théoriques et expérimentales de flexion de la poutre 1. Les fréquences propres des deux essais expérimentaux et les fréquences propres calculées grâce à 5 valeurs de $G_{1,3}$ sont comparées dans la Figure 7-1.

Les écarts des valeurs expérimentales représentées sur la figure ci-dessus par des barres noires proviennent du Tableau 5.5 quantifiant les erreurs expérimentales causées par des surfaces non-planes et des sections creuses. De plus, celles-ci ne possèdent qu'un sens positif (vers le haut) puisque les fréquences propres expérimentales sont sous-estimées par rapport aux valeurs des fréquences propres réelles à cause du banc d'essais.

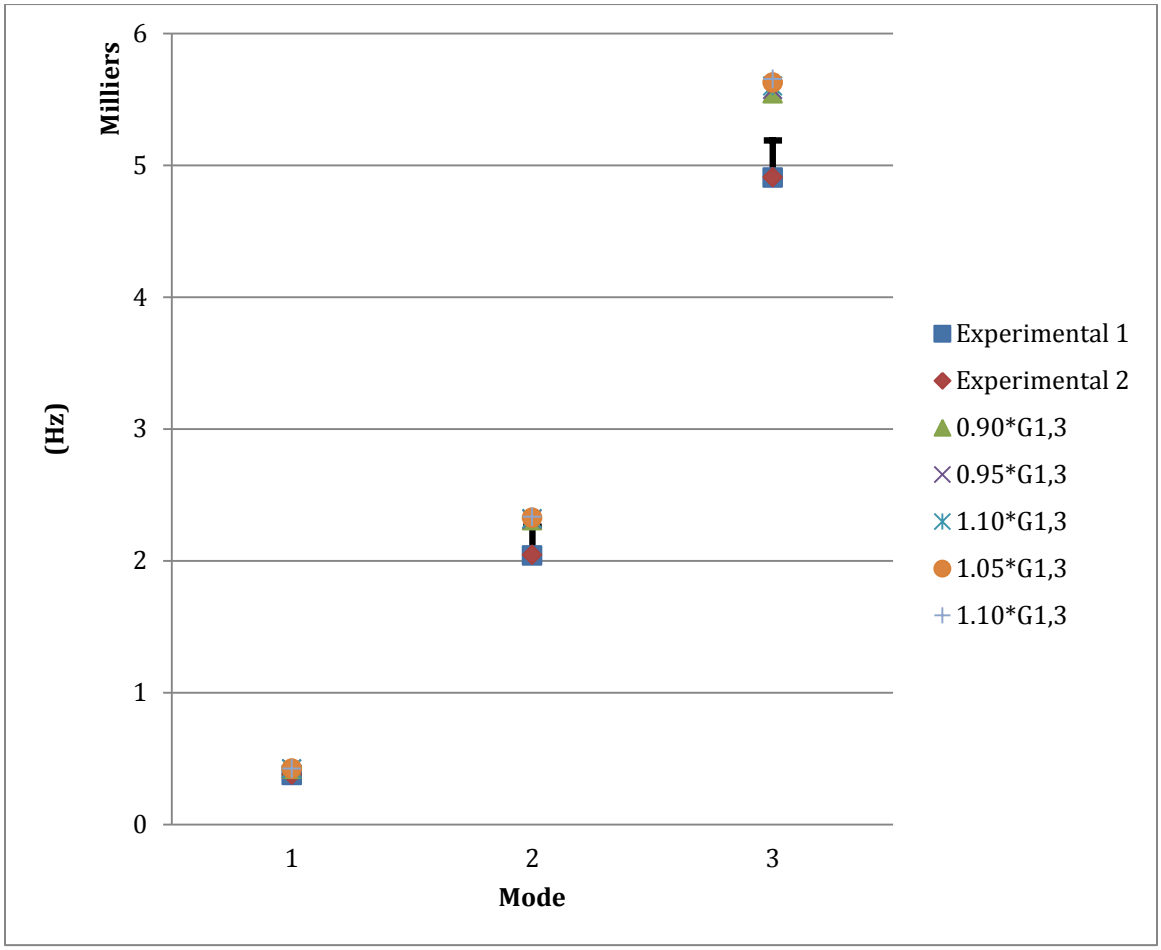


Figure 7-1 : Fréquences propres expérimentales et théoriques pour plusieurs modules de cisaillement

Certains résultats attendus apparaissent. En effet, les fréquences propres augmentent avec le numéro de mode. De manière générale, les fréquences propres théoriques sont très proches entre elles et les fréquences propres expérimentales des deux essais sur le banc d'essais le sont aussi. On remarque que le modèle prédit avec une bonne précision les fréquences propres des deux premiers modes. À partir du troisième mode, l'écart entre les fréquences propres expérimentales et théoriques est plus élevé. Cet écart est possiblement expliqué par l'hypothèse faite sur le module de cisaillement transversal, qui a été approximé par celui d'un matériau composite unidirectionnel. La Figure 7-2 illustre le module de cisaillement qui doit être injecté dans le modèle pour que les valeurs théoriques présentent un écart acceptable avec les fréquences expérimentales.

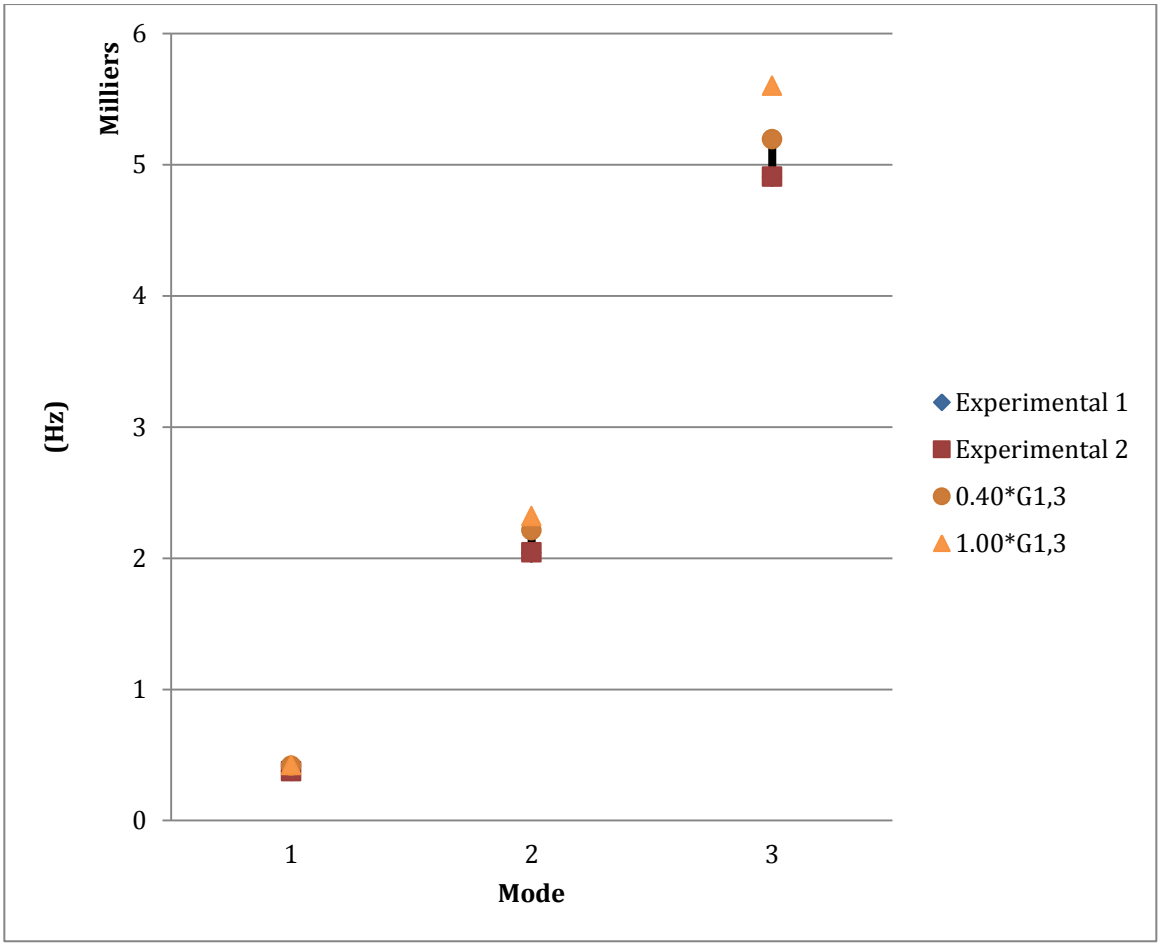


Figure 7-2 : Détermination graphique du module de cisaillement transversal

La valeur du module de cisaillement qui doit être utilisée dans le modèle pour que les fréquences propres théoriques et expérimentales soient suffisamment proches est la suivante :

$$G_{1,3} = 0.4 * G_{1,3_{unidir}} = 0.653\ GPa \qquad 7.1$$

Celle-ci est donc plus faible que la valeur du module de cisaillement des couches unidirectionnelles. Malheureusement aucune donnée ne permet de valider cette hypothèse et l'auteur n'a pas réussi non-plus à valider cette hypothèse avec la littérature. Il ne faut pas perdre de l'esprit que l'écart entre les fréquences propres théoriques et les fréquences propres expérimentales sont causées par une incertitude sur la valeur du module de cisaillement, mais également sur un modèle théorique qui peut être amélioré.

Il faut bien comprendre qu'on ne peut parler que d'écart entre les fréquences propres théoriques et les fréquences propres expérimentales et non d'erreur, puisque comme expliqué dans la

conclusion de l'ANNEXE VI les fréquences propres expérimentales ne sont probablement pas suffisamment proches des fréquences propres réelles des poutres lorsque celles-ci présentent des sections creuses. De plus l'écart entre les fréquences propres théoriques s'accroit avec le numéro de mode. Ceci signifie que l'influence du module de cisaillement, et donc du cisaillement lui-même, augmente avec le numéro de mode. Cette conclusion est bien connue pour le modèle de Timoshenko (Han et al., 1999).

Les figures qui suivent se concentrent uniquement sur les fréquences propres théoriques et visent à mieux comprendre la relation entre les fréquences propres et $G_{1,3}$. La figure ci-dessous illustre les courbes des fréquences propres en fonction de $G_{1,3}$ pour les cinq premiers modes.

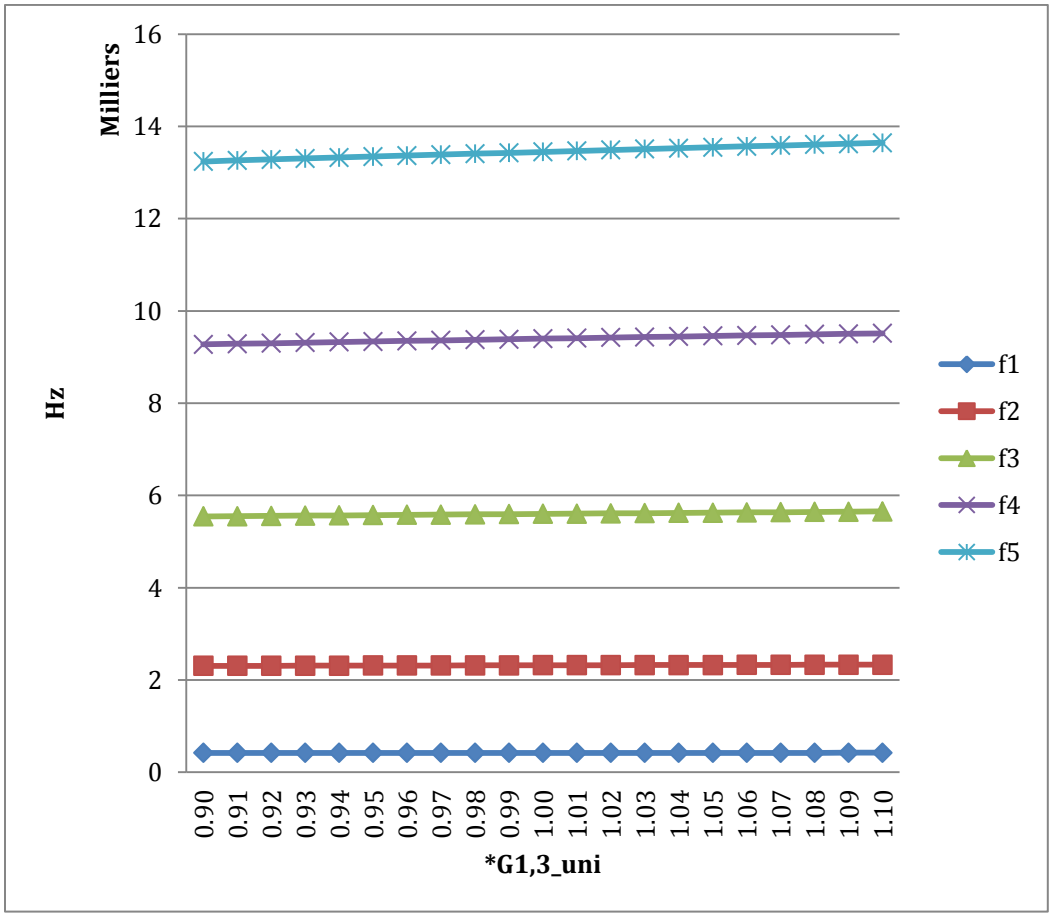


Figure 7-3 : Fréquences propres en fonction de $G_{1,3}$ pour chaque mode

Les fréquences propres sont croissantes en fonction de $G_{1,3}$.

La figure ci-dessus montre que les fréquences propres augmentent en fonction de $G_{1,3}$ mais également avec le numéro de mode. En d'autres termes le taux de croissance des fréquences

propres est plus élevé pour les numéros de mode supérieurs. La première fréquence propre est presque constante et ces courbes ont l'air droites. La figure ci-dessous illustrant la pente de chacune des courbes de la Figure 7-3 éclairci les interrogations.

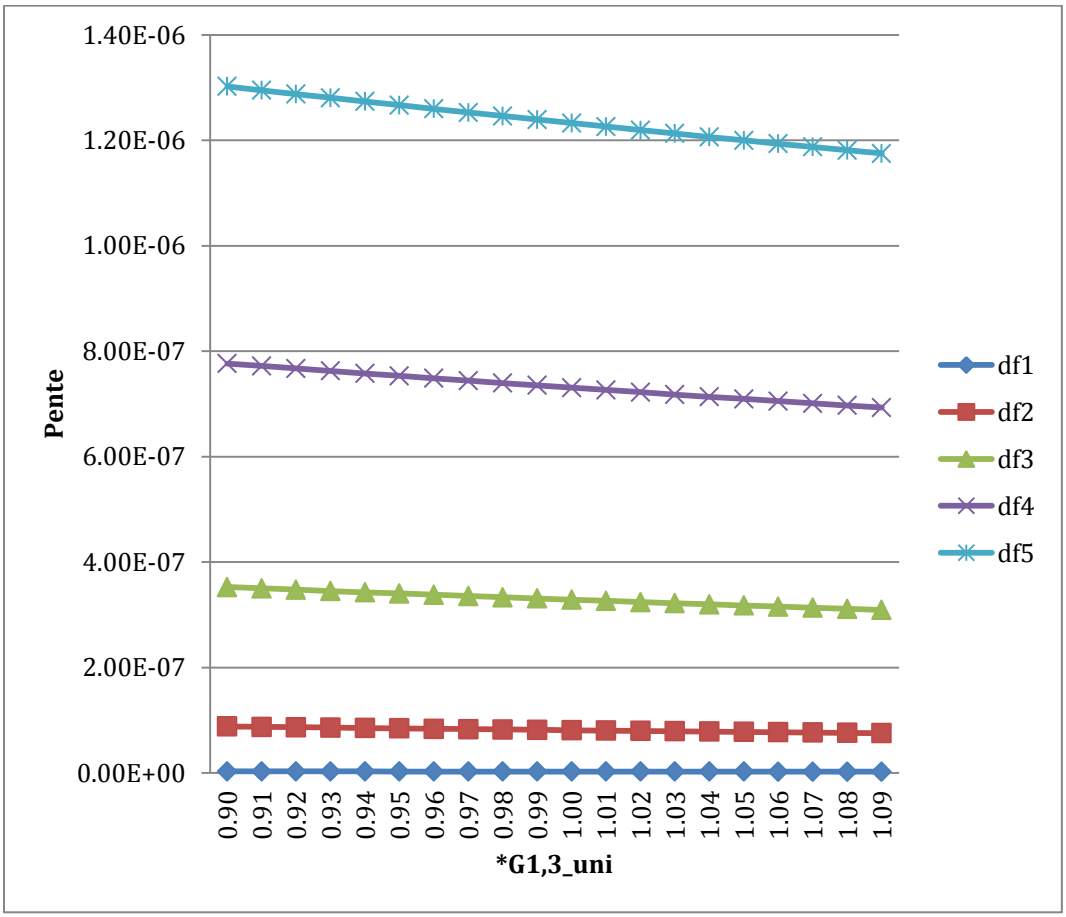


Figure 7-4 : Pente des fréquences propres en fonction de $G_{1,3}$

Cette figure montre que pour les deux premières fréquences propres les pentes sont presque constantes mais positives. Ceci signifie que les courbes sont presque des droites et que les fréquences propres augmentent avec un $G_{1,3}$croissant. Les pentes pour les trois modes les plus élevées sont décroissantes en fonction de $G_{1,3}$. Les courbes de la Figure 7-4 ne sont donc pas des droites et tendent vers une asymptote oblique de pente plus faible que les courbes des fréquences.

7.1 Conclusions

L'analyse de sensibilité a montré que la valeur du module de cisaillement, et donc du cisaillement en tant que tel, possède une influence croissante ave le numéro de mode. Il a été déterminé que la

valeur du module de cisaillement transversal dans les axes principaux du matériau composite bidirectionnel doit valoir 40% de la valeur de l'approximation du module des composites unidirectionnels afin que les résultats théoriques s'approchent suffisamment des résultats expérimentaux. La littérature trouvée par l'auteur ne suffit pas pour valider ou invalider ce résultat.

De plus, les fréquences propres augmentent avec un $G_{1,3}$ croissant, les pentes des courbes sont positives et sont plus élevées pour les modes élevés. Cependant, les pentes tendent à diminuer. Donc, bien que les fréquences propres aient tendance à croitre, le taux de croissance diminue. Le taux de croissance des fréquences propres diminue plus rapidement pour les modes élevés.

CHAPITRE 8 ANALYSE PARAMÉTRIQUE DE LA SÉQUENCE D'EMPILEMENT

Dans le chapitre précédent l'influence du module de cisaillement transversal sur les fréquences propres de la poutre 1 a été étudiée. Dans ce chapitre, l'influence de la séquence d'empilement en utilisant uniquement des combinaisons de couches $\pm 45°$ et $0°\backslash 90°$ est étudiée. La première partie présente un récapitulatif des valeurs des modules de rigidité pour les couches horizontales et verticales. Dans la deuxième partie les fréquences propres de quelques séquences d'empilement, choisies de manière stratégique, sont présentées et des tendances sont extraites en fonction des modes considérés. Par la suite, le comportement transitoire d'un point précis des poutres en fonctions du temps est illustré dans des figures.

8.1 Généralités

Le bon fonctionnement du code informatique est désormais confirmé. L'intérêt de l'étude paramétrique est d'extraire des tendances en simulant un grand nombre de cas. Le paramètre choisi est la séquence d'empilement. Ce paramètre fera varier la rigidité en flexion globale, ainsi que la rigidité en cisaillement globale.

L'étude paramétrique est réalisée pour une poutre en composites multicouches à section creuse avec 4 plis d'orientation $0°/90°$ ou $\pm 45°$. Les dimensions géométriques choisies sont celles de la poutre 1 en composites et les composites utilisés sont ceux des chapitres précédents (Cytec, n.d.).

Le choix d'impact a une influence sur les solutions des coordonnées générales. L'impact choisi est celui de la Figure 5-10 représentant un impact obtenu avec l'embout en acier inoxydable sur le marteau instrumenté.

Pour rappel, les couches horizontales d'orientation $\pm 45°$ présentent un module de rigidité longitudinal supérieur aux couches d'orientation $0°/90°$, mais un module de rigidité en cisaillement dans le plan plus faible. L'hypothèse qui a été réalisée sur le module de cisaillement transversal $G_{1,3}$ est toujours valable. Sous celle-ci le module de cisaillement transversal est approximé par celui d'un matériau composite unidirectionnel tel que décrit par la relation 6.8. Le module de rigidité en cisaillement transversal est toujours plus faible que les modules de rigidité

en cisaillement dans le plan pour les deux types d'orientation, tel que montré précédemment dans le Tableau 6.2 réaffiché ci-dessous :

Tableau 8.1 : Modules de rigidité pour les couches horizontales et verticales et pour les deux orientations de fibres (Tableau 6.2)

Couche horizontale				Couche Verticale			
0°\90°		±45°		0°\90°		±45°	
E_x	42.80	E_x	44.31	E_x	42.80	E_x	44.31
G_{xy}	17.23	G_{xy}	16.34	G_{xy}	16.33	G_{xy}	16.33
G_{xz}	16.33	G_{xz}	16.33	G_{xz}	17.23	G_{xz}	16.34

Avec les éléments présentés ci-dessus, il faudrait s'attendre à une augmentation de la rigidité en flexion pour une paroi horizontale, et donc à une augmentation des fréquences propres, avec un nombre croissant de couches d'orientation $\pm 45°$ et également avec une séquence d'empilement où ces mêmes couches sont placées vers l'extérieur de la section de la poutre. La position dans une paroi verticale d'une couche à $\pm 45°$ ne devrait pas avoir d'influence sur la rigidité en flexion de la poutre puisque chaque position possible pour une paroi verticale possède le même second moment de surface.

8.2 Analyse paramétrique

L'objectif de ce paragraphe est de comprendre l'influence de la séquence d'empilement des matériaux composites bidirectionnels sur les fréquences propres. Les matériaux composites étudiés possèdent une orientation soit de 0°/90°, soit de ±45° par rapport à l'axe de la poutre. Les deux premières analyses visent à comprendre l'influence d'un remplacement d'une couche à 0°/90° par une couche à ±45° et de l'influence du déplacement d'une couche à ±45° vers l'extérieur de la section. Par la suite les comportements transitoires des poutres de toutes les séquences d'empilement sont comparés.

8.2.1 Remplacement d'une couche à 0°/90° avec une couche à ±45° - Première analyse

Le tableau ci-dessous numérote les cas séquences d'empilement possibles partant de l'intérieur vers l'extérieur des poutres :

Tableau 8.2 : Numérotation des séquences d'empilement

Numéro de séquence	Séquence	Numéro de séquence	Séquence	Numéro de séquence	Séquence
1	**0/0/0/0**	7	**0/45/45/0**	13	**45/45/0/0**
2	**0/0/0/45**	8	**0/45/45/45**	14	**45/45/0/45**
3	**0/0/45/0**	9	**45/0/0/0**	15	**45/45/45/0**
4	**0/0/45/45**	10	**45/0/0/45**	16	**45/45/45/45**
5	**0/45/0/0**	11	**45/0/45/0**		
6	**0/45/0/45**	12	**45/0/45/45**		

Le Tableau 8.3 illustre les fréquences propres approximatives de 6 empilements différents. Il montre que la variation des fréquences propres n'est pas drastique. Ceci est dû au fait que les modules de rigidité pour les couches avec les deux orientations de fibres étudiées sont semblables.

Tableau 8.3 : Fréquences propres approximatives de 6 empilements différents

Fréquences propres [Hz]	**0/0/0/0**	**45/0/0/0**	**Différence entre 0/0/0/0 et 45/0/0/0**	**0/0/0/45**	**Différence entre 45/0/0/0 et 0/0/0/45**	**45/45/45/45**	**Différence entre 0/0/0/0 et 45/45/45/45**
f_1	417.68	419.25	0.38%	419.51	0.06%	424.40	1.61%
f_2	2,306.67	2,312.13	0.24%	2,313.24	0.05%	2,330.02	1.01%
f_3	5,585.03	5,591.83	0.12%	5,593.77	0.03%	5,614.12	0.52%
f_4	9,390.57	9,393.30	0.03%	9,395.55	0.02%	9,402.54	0.13%
f_5	13,456.16	13,450.94	-0.04%	13,453.12	0.02%	13,434.85	-0.16%

De plus, certaines observations peuvent-être tirées pour les quatre premières fréquences propres dans le tableau ci-dessus (l'analyse du cinquième mode est effectuée plus bas). Ainsi, pour les quatre premiers modes, la séquence d'empilement 0/0/0/0 est la plus souple puisqu'elle présente les fréquences propres les plus faibles. La séquence la plus rigide, et donc présentant les fréquences propres les plus élevées, est la 45/45/45/45. La fréquence du premier mode de la séquence d'empilement 0/0/0/0 est 0.38% plus faible que celle de la séquence 45/0/0/0 et 1.61% plus faible que celle de la séquence 45/45/45/45. Ces valeurs diminuent avec un mode croissant. Plus précisément, pour le quatrième mode la fréquence propre de 0/0/0/0 est de 0.03% pour faible que celle de 45/0/0/0 et 0.13% plus faible que celle de 45/45/45/45. Ceci démontre bien que pour les 4 premiers modes, la fréquence propre augmente avec le nombre de couches à ±45°. Ceci est dû à l'augmentation du module de rigidité longitudinale E_x de la poutre avec un nombre croissant de couches à ±45°.

Un tel exemple est illustré à la Figure 8-1 (a), où le passage de la séquence d'empilement 0/0/0/0 vers 45/0/0/0 est fait. En effet, dans cette illustration la couche à 0°/90° la plus proche du centre de la section est remplacée par une couche à ±45°. La Figure 8-1 (b) illustre de manière visuelle le changement des modules entre les deux premières séquences étudiées dans le Tableau 8.3. En effet la couche remplacée dans la Figure 8-1 (a) possède un module de rigidité longitudinal plus

élevé. Les modules sont classés en ordre croissant du haut vers le bas dans les légendes. Ceci est également illustré par le signe d'inégalité dans les légendes.

On retrouve également un second résultat attendu. On remarque que pour les quatre modes, la séquence d'empilement 0/0/0/45 possède des fréquences propres plus élevées que la séquence 45/0/0/0. Cet écart est de 0.06% pour le premier mode et se réduit à 0.02% pour le quatrième mode. Ceci est causé par une légère augmentation du module de flexion de la poutre, qui est proportionnel à E_x, en déplaçant la couche ±45° de l'intérieur vers l'extérieur.

La Figure 8-1 (c) illustre le changement de module de cisaillement transversal lors du passage de la séquence 0/0/0/0 vers la séquence 45/0/0/0. En effet, cette figure illustre que les parois verticales de la couche à 0°/90° la plus proche du centre de la section possèdent un module de cisaillement transversal plus élevé que les parois verticales de la couche à $\pm 45°$ avec laquelle elle est remplacée. Pour rappel, ceci est causé par le fait qu'une couche à $0°\backslash 90°$ possède un module de cisaillement dans le plan plus élevé qu'une couche à $\pm 45°$. L'influence du cisaillement transversal devient importante pour les modes élevés. L'influence de la diminution du module de cisaillement dans le plan lors du remplacement de la couche à $0°\backslash 90°$ avec celle à $\pm 45°$ est plus importante que l'augmentation du module de rigidité longitudinale et ceci causerait donc un abaissement de la fréquence propre par rapport à la configuration initiale à partir d'un certain mode de manière générale. Le fait de déplacer la couche à $\pm 45°$ vers l'extérieur augmente de la rigidité en flexion grâce aux couches horizontales et non grâce aux parois verticales mais ne suffit pas à compenser la perte de rigidité initiale due au remplacement de la couche à $0°\backslash 90°$. Cela aurait peut-être été différent si des couches supplémentaires étaient présentes.

Les propos ci-dessus sont illustrés par la Figure 8-2 dont les valeurs sont fictives. Cette figure illustre les rapports des fréquences propres des 5 premiers modes obtenus en remplaçant une couche à $0°\backslash 90°$ avec une couche à ±45°. Elle transmet le message que lorsque ce remplacement est effectué, l'augmentation du module de rigidité longitudinal provoque une augmentation des fréquences propres pour les quatre premiers modes. Cette augmentation s'affaiblit avec le numéro du mode parce que la diminution du module de cisaillement transversal tend à réduire les fréquences propres et parce que le cisaillement devient plus important lorsque le numéro de mode augmente.

À partir de la cinquième fréquence propre, la poutre possédant uniquement des couches d'orientation 0° possède la fréquence propre la plus élevée et celle possédant uniquement des couches 45° possède la fréquence propre la plus faible. Plus précisément, la séquence d'empilement 0/0/0/0 possède une fréquence propre pour le cinquième mode 0.04% plus élevé que celle de la séquence 45/0/0/0 et 0.16% plus élevé que celle de la séquence 45/45/45/45. Le déplacement de la couche d'orientation de 45° vers l'extérieur de la section a cependant toujours le même effet d'augmenter la fréquence. Ceci est probablement causé par l'influence du cisaillement sur les couches verticales.

La Figure 8-2 illustre ce propos. À partir du cinquième mode l'influence de la diminution du module de cisaillement transversal sur les fréquences propres l'emporte sur l'augmentation du module de rigidité longitudinal et la fréquence propre est donc réduite.

La case (a), (b) et (c) illustrent les deux séquences d'empilement étudiées, les modules de rigidité longitudinaux et les modules de cisaillement transversaux respectivement pour les deux séquences d'empilement.

Il est donc nécessaire de faire la distinction entre deux types d'application pour les sections creuses avec les matériaux composites étudiés ici. Plus précisément, les applications où ce sont les faibles fréquences propres qui sont excités et les applications où ce sont les fréquences propres élevées qui sont excitées. Si l'objectif est d'obtenir des structures le plus rigide possible, il faudra dans le premier cas d'application sélectionner les matériaux avec le module de rigidité longitudinale le plus élevé et dans le deuxième cas les matériaux avec le module de cisaillement dans le plan le plus élevé. Le type d'application dépend en grande partie de la sollicitation. Si l'application comporte des impacts il est nécessaire d'évaluer si l'impact est suffisamment court et possède une vitesse suffisamment élevée pour exciter les fréquences propres élevées.

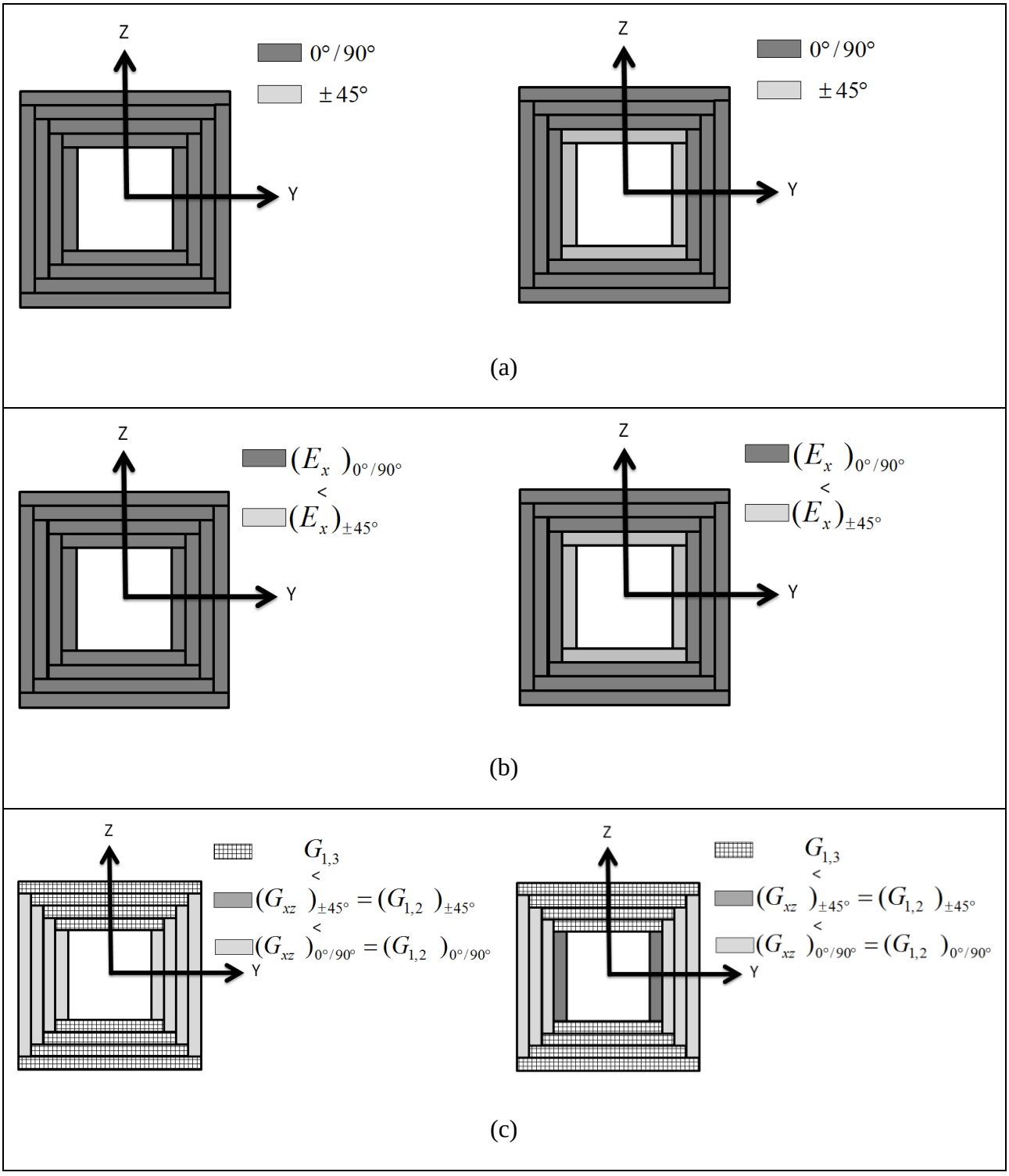


Figure 8-1 : Passage d'une configuration 0/0/0/0 à une configuration 45/0/0/0 : (a) changement d'orientation de la première couche, (b) changement du module de rigidité longitudinal de la première couche, (c) changement du module de cisaillement transversal de la première couche.

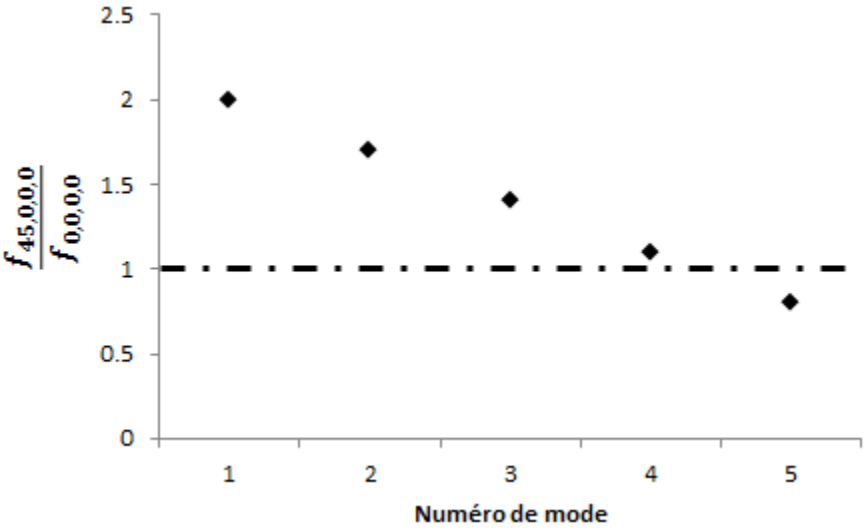


Figure 8-2 : Rapport des fréquences propres lors du remplacement d'une couche à 0°\90° avec une couche à ±45° pour les 5 premiers modes

8.2.2 Remplacement d'une couche à 0°/90° avec une couche à ±45° - Deuxième analyse

Il est difficile de prédire si, pour une séquence ne possédant qu'une seule couche à 45°, la rigidité augmente plus en déplaçant cette couche vers l'extérieur de la section ou si elle augmente plus en rajoutant une couche d'orientation ±45° à la couche sous-jacente. Les résultats ci-dessous tentent de répondre à cette question. La séquence d'empilement 0/45/0/0 représente le point de départ. À partir de cette séquence deux modifications sont proposées. La première consiste à ajouter une couche à ±45° sous-jacente qui résulte à la séquence 45/45/0/0. La deuxième consiste à déplacer la couche existante à ±45° vers l'extérieur de la section qui résultant à la séquence 0/0/45/0.

Tableau 8.4 : Effet de l'ajout d'une couche ±45° sous-jacente sur les fréquences propres

Fréq. propres [Hz]	45/45/0/0	0/45/0/0	0/0/45/0
f_1	420.89	419.33	419.42
f_2	2,317.84	2,312.49	2,312.86
f_3	5,598.96	5,592.45	5,593.10
f_4	9,396.22	9,394.01	9,394.77
f_5	13,445.67	13,451.62	13,452.35

Le tableau ci-dessus montre que l'effet de l'ajout d'une couche supplémentaire d'orientation à ±45° rigidifie la poutre plus que le fait de déplacer la couche à ±45° existante vers l'extérieur de la section, du moins pour les quatre premières fréquences propres. Pour la cinquième fréquence propre on remarque le même comportement que précédemment. L'ajout d'une couche à ±45° sous-jacente contribue à une perte de rigidité en flexion par rapport à la séquence d'empilement où la couche à ±45° initiale est déplacée vers l'extérieur. La même analyse pour une séquence d'empilement initiale de 0/0/45/0 n'a pas été réalisée.

8.2.3 Comportement transitoire des 16 séquences d'empilement

Le logiciel construit arrive à simuler le comportement transitoire des poutres étudiées. Il arrive non seulement à simuler le déplacement transversal, mais également l'angle de flexion, l'angle de cisaillement, la vitesse et l'accélération à tout instant et sur la longueur entière des poutres. Dans le cadre de l'étude paramétrique de la séquence d'empilement, les 16 empilements ont été simulés.

Étant dans l'impossibilité d'insérer les animations dans le texte, les résultats présentés ci-dessous illustrent le déplacement, la vitesse, l'accélération, l'angle de flexion α_x, ainsi que l'angle de cisaillement transversal γ_{xz} pour le point arbitraire $x = \frac{3}{4}L$ pour une durée de temps limitée arbitraire elle aussi. Cette durée est environ 15 fois plus élevée que la durée de l'impact qui fait environ $2 * 10^{-3}\ s$. L'impact est localisé à $x = \frac{1}{4}L$.

La courbe temporelle de l'impact est également affichée sur la Figure 8-3. La Figure 8-4 illustre les déplacements 16 poutres au même endroit ainsi que les écarts du déplacement des poutres par rapport à la poutre possédant la séquence d'empilement 0/0/0/0. Afin de réduire l'espace qu'occupent les figures, les unités de l'axe des abscisses et la légende ne sont affichés qu'une seule fois au bas des figures.

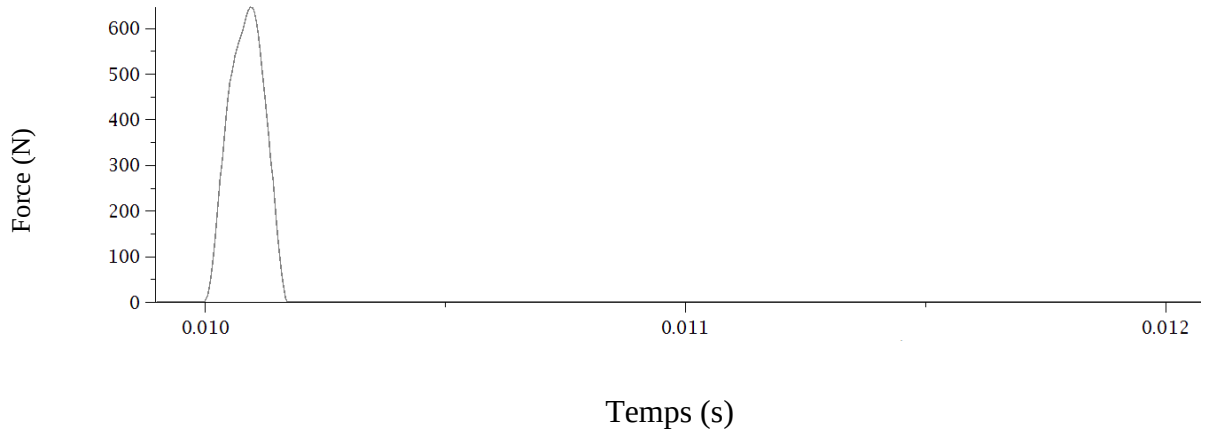


Figure 8-3 : Courbe d'impact

La Figure 8-4 (a) montre que les déplacements au point considéré sont de l'ordre de $2 * 10^{-4}m$. Les courbes sont assez proches entre elles. Cela est à nouveau expliqué par le fait que les modules de rigidité des différentes couches sont semblables. La Figure 8-4 (b) représentant les

écarts par rapport à la poutre possédant la séquence 0/0/0/0 permet de mieux visualiser les différences entre les poutres. Les écarts sont de l'ordre de $3 * 10^{-5}m$ dans la gamme de temps des figures. Cet écart vaut 15% de l'ordre de grandeur des déplacements transverses. Cependant Trois éléments en ressortent. Premièrement, les courbes de toutes les poutres sont enveloppées par les courbes des poutres de séquence 0/0/0/0 et 45/45/45/45. Deuxièmement, les courbes forment 5 groupes. Les courbes de chaque groupe possèdent 0, 1, 2, 3 ou 4 couches d'orientation $\pm 45°$ respectivement. Troisièmement, les pics des courbes n'ont pas lieu au même instant. Ce décalage est causé par une différence sur les fréquences propres des différentes séquences d'empilement pour chaque configuration. Au plus le temps avance, au plus ce comportement est accentué. Afin de mieux visualiser les deux derniers éléments mentionnés, la fin de la figure des écarts est agrandie. Il faut préciser que dans Figure 8-4 le deuxième mode ne possède pas une amplitude très élevée. Ceci est causé par le fait que le point de mesure théorique est localisé très proche du nœud du deuxième mode.

La Figure 8-4 (d) montre qu'avec le temps, la courbe de la séquence 45/45/45/45 acquiert légèrement de l'avance sur les courbes des autres séquences d'empilement. Ceci signifie que cette dernière séquence est la plus rigide pour l'impact utilisé dans les calculs. En effet, cet impact excite surtout les faibles modes, pour lesquels les fréquences propres sont accrues, donnant donc à la courbe de la séquence 45/45/45/45 une légère avance temporelle sur les autres courbes. Cette observation est valable pour l'ensemble des séquences d'empilement pour ce cas de chargement. Plus la raideur est élevée, plus l'avance temporelle est importante.

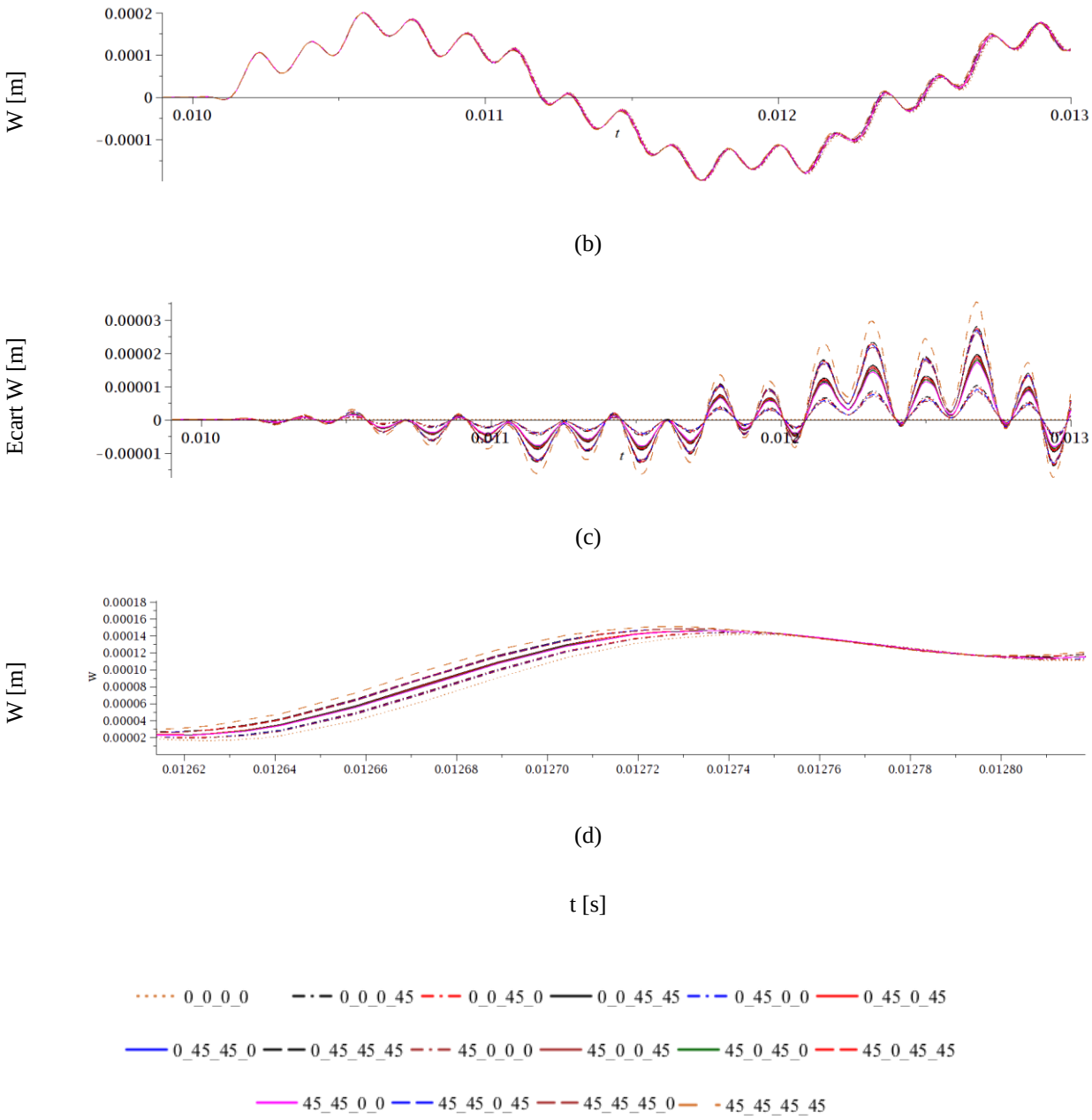


Figure 8-4 : Déplacement en fonction du temps du point $x = \frac{3}{4}L$ et écarts pour toutes les séquences d'empilement : (a) déplacement transversal; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).

Voici les mêmes figures pour l'angle de flexion α_x. L'intervalle temporelle est la même qu'auparavant.

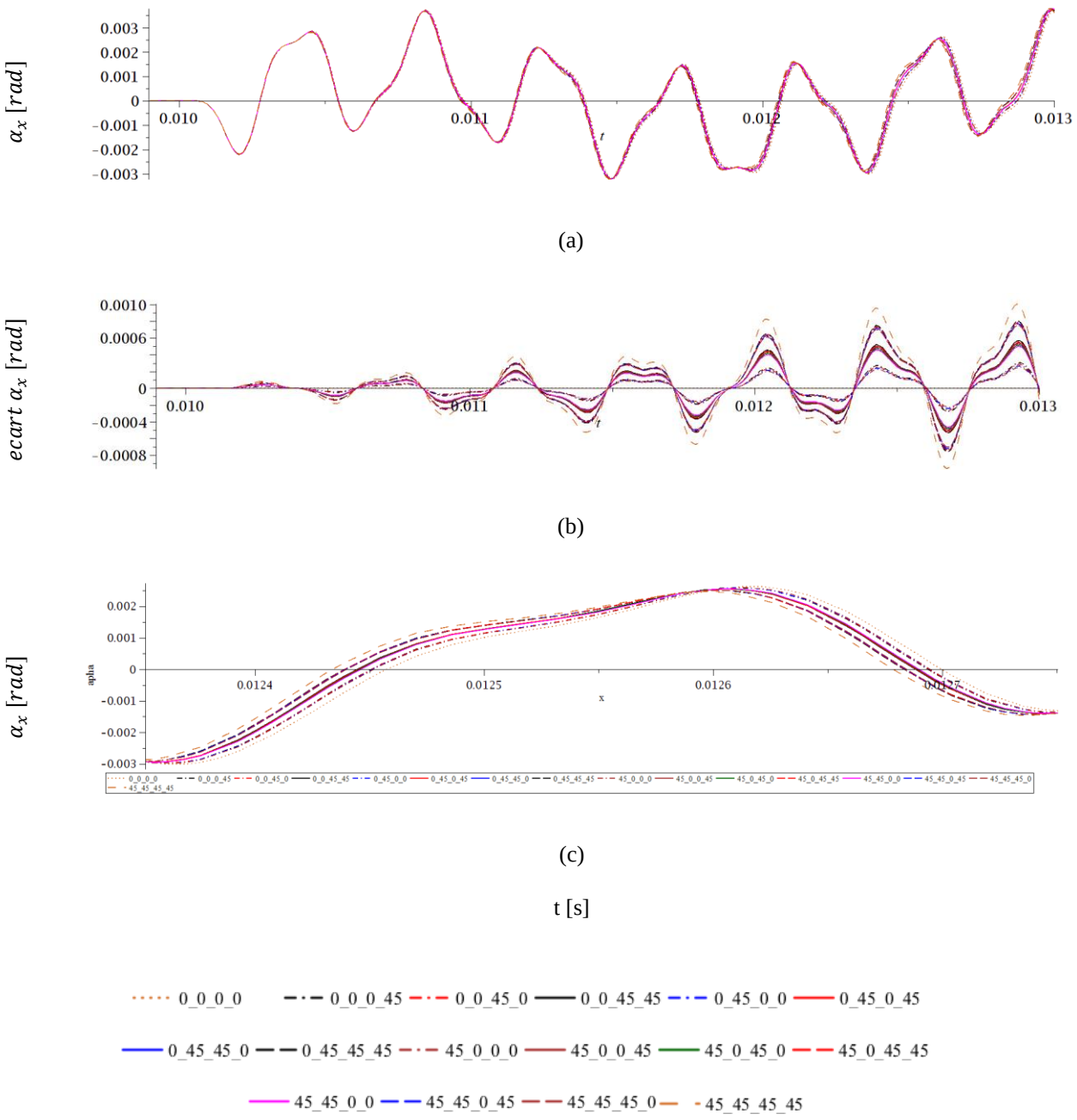


Figure 8-5 : Angle de flexion, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = \frac{3}{4}L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) angle de flexion; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a)

Les angles de flexion sont de l'ordre de $3 * 10^{-3}\ rad$ et les écarts de l'ordre de $10^{-3}\ rad$. L'ordre de grandeur des écarts vaut 33.33% de l'ordre de grandeur des angles de flexion. Les mêmes éléments que pour les déplacements ressortent grâce aux observations.

Voici les mêmes figures pour les angles de cisaillement γ_{xz}. Pour rappel, les angles de cisaillement sont définis comme la soustraction entre la dérivée spatiale du déplacement spatial et de l'angle de flexion.

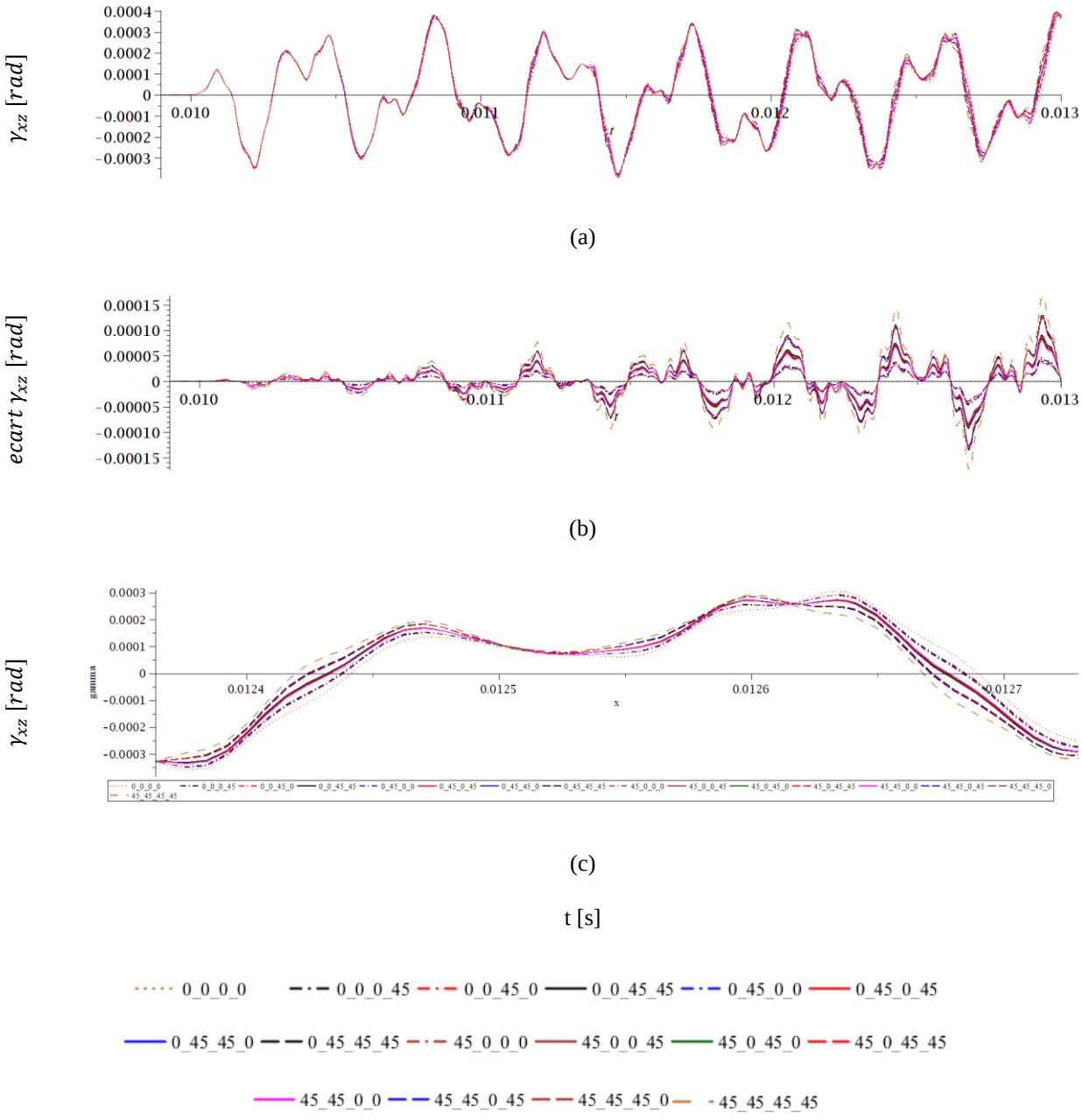


Figure 8-6 : Angle de cisaillement, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = \frac{3}{4}L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) angle de cisaillement; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).

Les angles de cisaillement sont de l'ordre de $4 * 10^{-4}\, rad$ et les écarts de l'ordre de $1.5 * 10^{-4}\, rad$. L'ordre de grandeur des écarts vaut 37.5% de l'ordre de grandeur des angles de flexion. Les mêmes éléments que pour les déplacements ressortent grâce aux observations.

Un lien avec la recherche de (Horel, 2013) peut être fait en ce moment-ci. Dans cette recherche des « patchs » viscoélastiques sont placés le long d'une poutre en composite sandwich afin d'amortir les vibrations en absorbant l'énergie de cisaillement. Le placement de ces viscoélastiques pourrait être optimisé grâce à cette recherche. En effet, le code construit permet de visualiser les endroits où le cisaillement est maximal le long de toute la poutre en fonction du temps. Voici une figure qui illustre le cisaillement le long de la poutre à un instant donné.

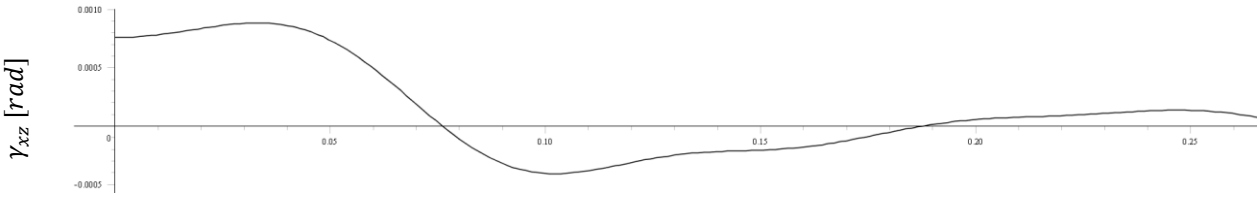


Figure 8-7 : Cisaillement le long de la poutre 0/0/0/0 pour l'instant t=0.010118s

La figure ci-dessus illustre le cisaillement de la poutre 0/0/0/0 à l'instant où le cisaillement est maximal. Cet instant survient très peu de temps après l'impact et correspond approximativement à l'instant où la pente de la fibre neutre, soit la dérivée spatiale du déplacement, est maximale puisque l'angle de flexion est toujours nul à l'encastrement. Le cisaillement est maximal proche de l'encastrement et est de l'ordre de $10^{-3}\, rad$. Les « patch » viscoélastiques devraient donc être placés proche de l'encastrement. De plus, sachant que le cisaillement est probablement maximal au centre de la poutre les « patchs » devraient être placés sur les parois verticales.

Voici les mêmes figures pour les vitesses transversales. Pour rappel, les vitesses sont obtenues grâce à la dérivée temporelle du déplacement.

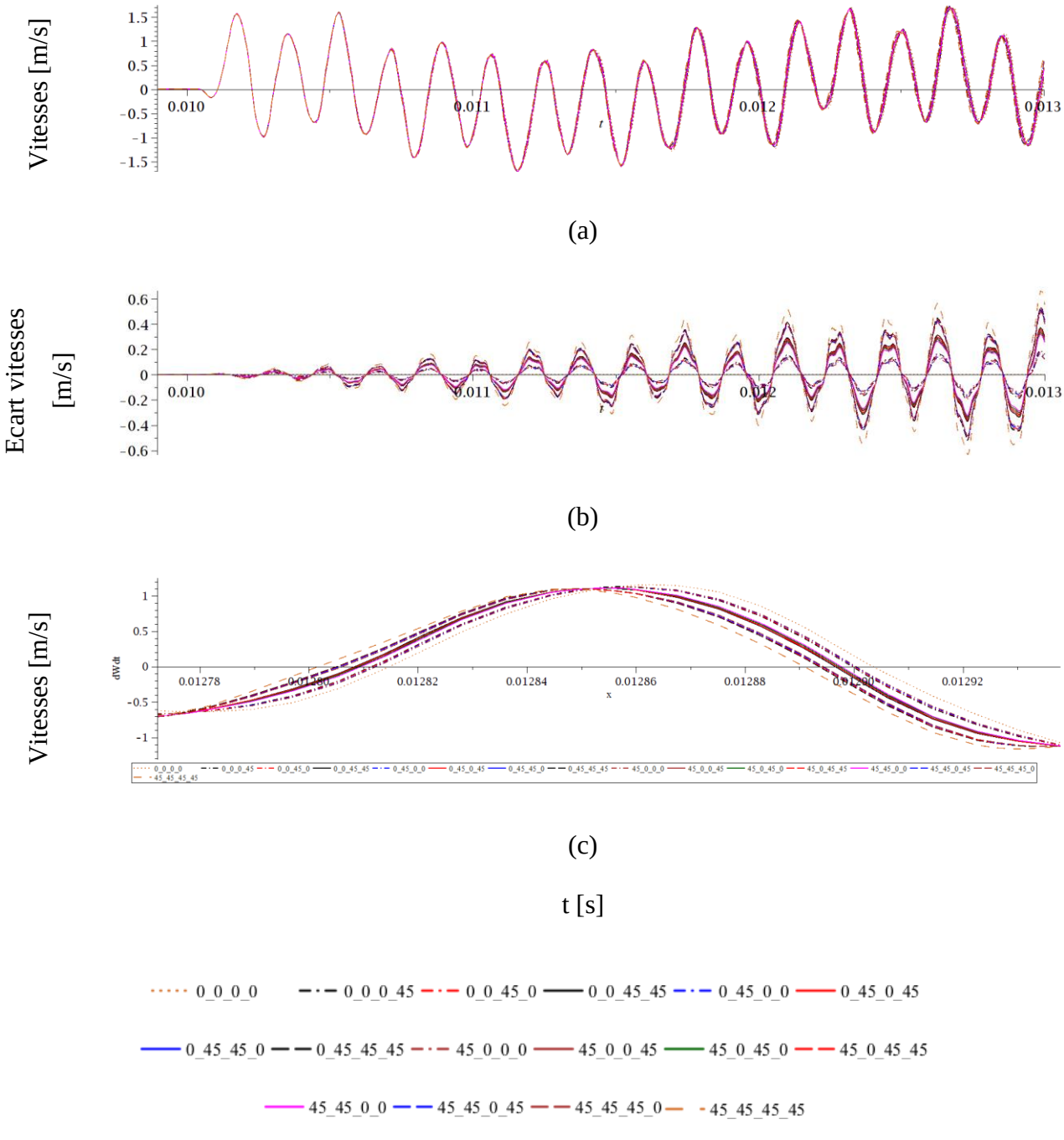


Figure 8-8 : Vitesses, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = \frac{3}{4}L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) vitesse; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).

Les vitesses sont de l'ordre de $1.5\frac{m}{s}$ et les écarts de l'ordre de $0.6\frac{m}{s}$. L'ordre de grandeur des écarts vaut 40% de l'ordre de grandeur des angles de flexion. Les mêmes éléments que pour les déplacements ressortent grâce aux observations.

Voici les mêmes figures pour les accélérations transversales. Pour rappel, les vitesses sont obtenues grâce à la dérivée temporelle du déplacement.

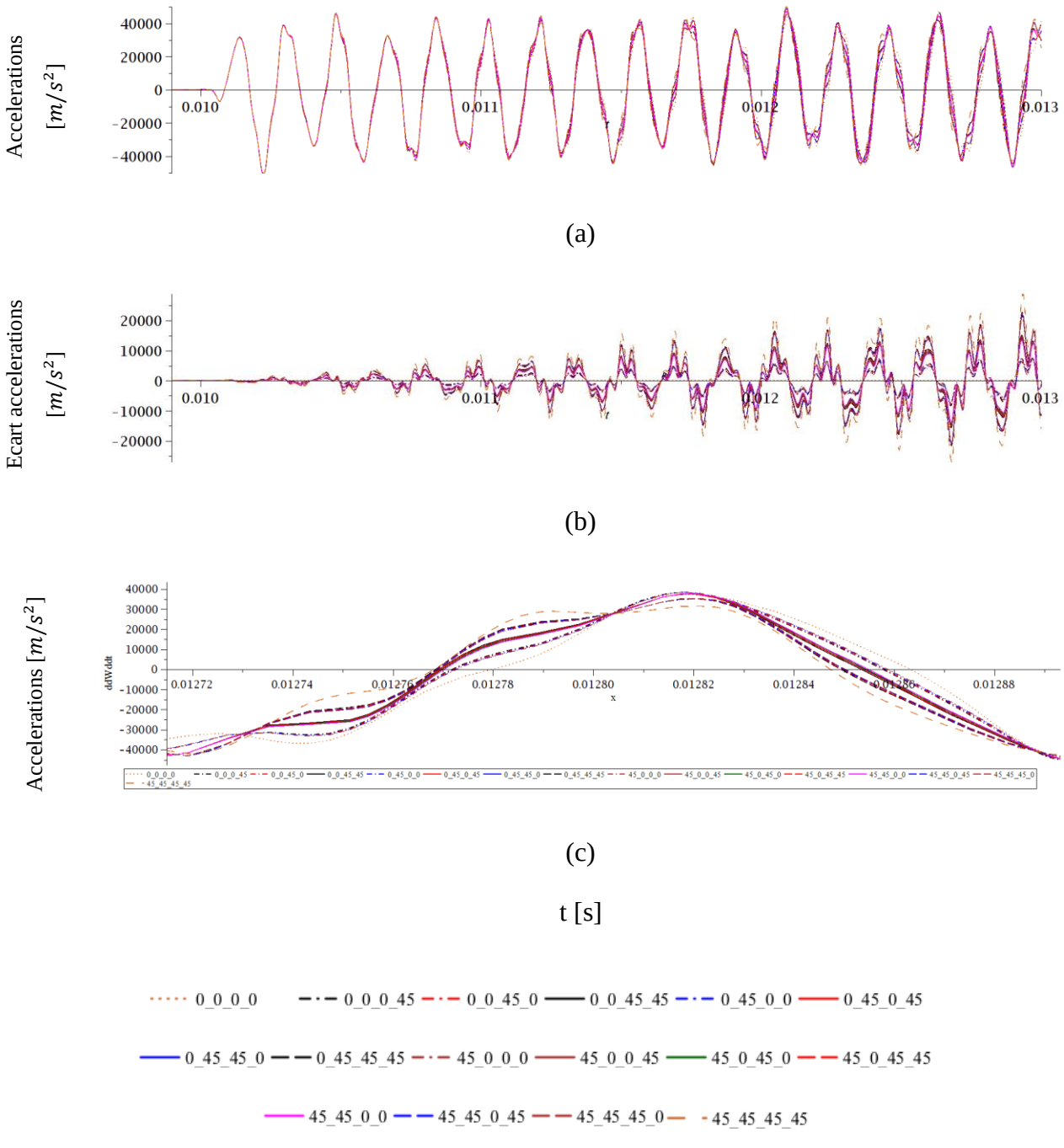


Figure 8-9 : Accélérations, écarts et agrandissement des écarts en fonction du temps du point $x = \frac{3}{4}L$ pour toutes les séquences d'empilement: (a) accélération; (b) écart entre les réponses; (c) agrandissement de (a).

Les accélérations sont de l'ordre de $4 * 10^4$ et les écarts de l'ordre de $2 * 10^4$. L'ordre de grandeur des écarts vaut 50% de l'ordre de grandeur des angles de flexion.

8.3 Comparaison avec la littérature

La littérature trouvée n'offre pas des possibilités de comparaison. La plupart des articles traitant de comportement transitoire ne font souvent pas de comparaison entre plusieurs séquences d'empilement. Lorsqu'une comparaison entre plusieurs configurations est réalisée, les auteurs ne comparent que la première fréquence propre. (Jafari, Khalili, & Azarafza, 2005) par exemple ont comparé des coques cylindriques avec plusieurs séquences d'empilement pour des vibrations longitudinales. Il n'est donc pas possible de comparer les résultats avec ceux de la présente recherche

Cela porte à croire que les analyses du paragraphe 8.2 sont des éléments d'originalité dans cette recherche.

8.4 Conclusions

Plusieurs choses ont été observées et une hypothèse a été émise. En effet, lorsqu'une couche d'orientation $0°\backslash 90°$ est remplacée par une couche $\pm 45°$ la fréquence propre d'un mode en particulier augmente par rapport à la configuration initiale pour les quatre premiers modes. Cependant la fréquence propre du cinquième mode diminue par rapport à la configuration initiale. Ceci est probablement causé par l'influence du cisaillement sur les couches verticales. En effet, les couches à $\pm 45°$ possèdent des modules de cisaillement dans le plan plus faibles que celles des couches à $0°\backslash 90°$. L'influence du cisaillement transversal devient importante pour les modes élevés. L'influence de la diminution du module de cisaillement dans le plan lors du remplacement de la couche à $0°\backslash 90°$ avec celle à $\pm 45°$ est plus importante que l'augmentation du module de rigidité longitudinale et ceci causerait donc un abaissement de la fréquence propre par rapport à la configuration initiale à partir d'un certain mode de manière générale.

De plus il a été observé sur les figures exposées dans le paragraphe précédent que les résultats de toutes les poutres se trouvent constamment entre les courbes de la poutre de séquence 0/0/0/0 et la poutre de séquence 45/45/45/45. Si l'objectif est d'étudier les comportements transitoires extrêmes, il suffit donc d'étudier les séquences d'empilement 0/0/0/0 et 45/45/45/45 pour obtenir l'éventail des comportements possibles. Ceci n'est probablement vrai que pour le comportement transitoire lorsque l'effet du décalage des courbes causé par les fréquences propres qui ne sont pas égales d'une courbe à l'autre n'a pas trop d'influence. Pour finir il a été observé que pour

tous les résultats, les courbes forment 5 groupes en fonction du nombre de couches à ±45° que possèdent les poutres. Ceci signifie que les fréquences propres des poutres possédant le même nombre de couches à ±45° sont plus proches entre elles qu'avec les fréquences de poutres possédant un nombre différent de couches à ±45°. Ces observations ne concernent que les poutres similaires aux poutres étudiées dans ce paragraphe. Un nombre croissant de couches pourrait modifier certaines de ces observations.

CHAPITRE 9 AMÉLIORATIONS FUTURES

Cette étude couvre un large éventail de matière et constitue une base assez solide qui nécessite cependant des améliorations. Les améliorations futures sont donc structurées en une partie théorique et une partie expérimentale.

9.1 Améliorations théoriques

Le choix de travailler avec des poutres à section rectangulaire a été motivé pour pouvoir travailler dans le repère cartésien. En effet, les équations des stratifiés, des poutres et des énergies sont bien connues et bien maitrisées dans ce repère. La réelle difficulté avec des formes non rectangulaires serait au niveau du calcul des énergies, où il faudrait paramétrer les variables spatiales pour pouvoir épouser des formes complexes. Au contraire, les théories analytiques des poutres ne présentent aucun problème pour calculer les nombres d'onde et les fonctions modales du moment que les paramètres adimensionnels, qui prennent en compte la section et le second moment de surface, sont fournis. Si des formes non-rectangulaires sont étudiées, le facteur de forme k' devra être adapté.

Les hypothèses sur les sections des poutres, ainsi que sur la séquence d'empilement des matériaux composites garantissent qu'aucun couplage entre les vibrations transversales et les vibrations en torsion, ni les vibrations longitudinales n'aura lieu, bien que le code ait été conçu pour pouvoir inclure ces phénomènes dans le futur. En effet, des simulations qui ne sont pas exposées dans ce texte ont été réalisées pour modéliser les vibrations transversales et longitudinales pour une poutre symétrique, et donc sans couplages, avec succès. Dans ce cas, les fréquences transversales et longitudinales ne sont guère influencées l'une par l'autre. Cette simulation a résulté en un vecteur de coordonnées modales de dimension plus élevée. Cependant, le problème aux valeurs propres a été traité comme d'habitude. Pour inclure des couplages il faudra calculer les fonctions modales pour chaque type de vibration en s'assurant que les coordonnées modales sont bien différentiées et correctement assemblées dans le vecteur des coordonnées modales. Pour finir il faudra réécrire les expressions des énergies. Le programme traitera les matrices résultantes de la même manière.

L'approche adoptée pour résoudre le problème d'un stratifié a été de calculer les fonctions modales du problème homogénéisé et de les injecter dans les expressions des énergies du

stratifié. Bien que cette approche semble être relativement précise, il devrait être possible de gagner en précision en calculant les fonctions modales de chaque pli et en les injectant au bon endroit dans les expressions des énergies. Ceci résultera bien sûr en des problèmes aux valeurs propres de dimension plus élevée. En effet, pour simuler les vibrations d'un stratifié à 4 plis la dimension du vecteur des coordonnées modales est multipliée par 4.

Cette recherche ne s'est focalisée que sur les conditions aux limites d'une poutre encastrée-libre. Il serait intéressant de l'élargir à d'autres conditions aux limites telle que la simplement supportée ou la doublement encastrée. Pour ce faire, les équations fréquentielles de la théorie de Timoshenko devront être reprogrammées et les équations modales devront être modifiées pour éviter des éventuelles erreurs numériques similaires au Chapitre 3.

Cette recherche s'est aussi focalisée sur des problèmes à l'échelle macroscopique et avec une théorie d'élasticité locale. Dans la revue de littérature des recherches sur des nanopoutres, ainsi que sur des poutres utilisant la théorie d'élasticité non-locale d'Eringen ont été présentées. Il serait relativement facile de faire le saut dans ces domaines pour étudier le comportement transitoire de nanopoutres à paroi simple ou même à parois multiples avec la théorie d'élasticité non-locale, et ce, pour plusieurs conditions aux limites. Cela permettrait de modéliser et donc de contrôler efficacement les actuateurs, capteurs et autres résonateurs à haute fréquence construit à base de ces nanopoutres

9.2 Améliorations expérimentales

Le contre-moule en bois a été fabriqué à partir de matériaux trouvés dans le laboratoire de génie mécanique. Celui-ci constitue une preuve de concept et a démontré son utilité lors de la fabrication des poutres en composites. Cependant, il possède plusieurs imperfections dues à sa méthode de fabrication. L'idéal serait de fabriquer un contre-moule ayant le même principe de fonctionnement, mais à partir d'une section rectangulaire préfabriquée telle qu'une section rectangulaire métallique pour éviter certaines imperfections de fabrication.

Les poutres en composite fabriquées comportent certains défauts visibles à l'œil nu. Les arrêtes ne possèdent pas une courbure satisfaisante et la surface est relativement irrégulière. Il faudrait trouver un moyen de mieux serrer les plis autour du mandrin, de réussir à exercer une pression sur les arrêtes qui soit équivalente aux pressions exercées sur les faces des poutres et finalement

de trouver un moyen de fabriquer les sections de résines utilisées à l'intérieur des parties encastrées des poutres qui aient la même section que le mandrin.

Il a été démontré que l'encastrement du banc d'essais ne simulait pas suffisamment bien un encastrement parfait théorique pour les poutres creuses. Pour y remédier il serait peut être utile de redessiner un encastrement qui possède une plus grande surface de contact le long des axes longitudinaux des poutres testées. Afin d'améliorer la répétabilité des mesures il faudrait également trouver un moyen de positionner les poutres avec précision sur le banc d'essais.

Afin de minimiser les écarts entre les résultats théoriques et expérimentaux pour des sections creuses pour des poutres en composites, il faudrait utiliser un matériau possédant un module de rigidité similaire à celui du matériau du banc d'essais.

Le procédé de fabrication des poutres en composites est imparfait et cela mène à des incertitudes sur la masse volumique réellement obtenue pour les matériaux composites. Il faudrait mettre au point une méthode de détermination du poids des poutres après cuisson. Il est facile de mesurer le poids de chacune des composantes des poutres avant la fabrication de la poutre. En effet, le poids de la résine utilisée à l'intérieur de la poutre et le poids des couches pré-imprégnées peuvent être mesurés. En connaissant le poids total avant cuisson des couches en composites et en faisant l'hypothèse que la résine ne change pas de poids, il est possible de déterminer le poids après cuisson des composites et d'en déduire la masse volumique.

CHAPITRE 10 CONCLUSIONS

La modèle analytique des vibrations transverses d'une poutre en composite multi-couche à section creuse suite à un impact a été développé codée sur Maple et sur Matlab et ensuite résolue de manière semi-analytique. Le modèle analytique a été validé grâce à des résultats de la littérature ainsi qu'avec des résultats expérimentaux obtenus grâces à trois poutres en composites multicouche à section creuse testées sur un banc d'essais. Bien qu'il ait été difficile de quantifier la précision du modèle, les résultats sont jugés suffisamment précis pour les deux premiers modes pour la plupart des valeurs testées du module de cisaillement transversal des couches en composites. L'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux est attribué majoritairement au banc d'essais. L'incertitude sur la valeur du module de cisaillement transversal des couches en composite ainsi que le modèle théorique contribuent à ces écarts.

L'analyse paramétrique de la séquence d'empilement a également été effectuée et a permis de mieux comprendre l'influence des modules de cisaillement transversaux pour les modes élevés. En effet, à cause de l'influence du cisaillement sur les parois verticales, la poutre présentant les fréquences propres les plus faibles pour les quatre premiers modes finit par avoir la fréquence propre la plus élevée pour le cinquième mode. L'inverse est vrai pour la poutre qui possède les fréquences propres les plus élevées pour les quatre premiers modes. Il s'avère que les poutres avec un même nombre de couches à $\pm 45°$ possèdent des fréquences propres et des réponses transitoires très proches entre elles. Cependant, les fréquences propres et les comportements transitoires sont plus éloignés lorsque des poutres avec un nombre différent de couches à $\pm 45°$ sont comparés. Il est donc nécessaire de faire la distinction entre deux types d'application pour les sections creuses avec les matériaux composites étudiés ici. Plus précisément, les applications où ce sont les faibles fréquences propres qui sont excités et les applications où ce sont les fréquences propres élevées qui sont excitées. Si l'objectif est d'obtenir des structures le plus rigide possible, il faudra dans le premier cas d'application sélectionner les matériaux avec le module de rigidité longitudinale le plus élevé et dans le deuxième cas les matériaux avec le module de cisaillement dans le plan le plus élevé. Le type d'application dépend en grande partie de la sollicitation. Si l'application comporte des impacts il est nécessaire d'évaluer si l'impact est suffisamment court et possède une vitesse suffisamment élevée pour exciter les fréquences propres élevées. De plus, dans plusieurs domaines tel que l'aéronautique on cherche à éviter que

les structures n'entrent en résonance avec un chargement externe. Ce chargement pourrait provenir de l'écoulement de l'air ou des vibrations du moteur. Les fréquences de rotation des moteurs d'avion sont élevées et il faudrait s'assurer que les fréquences propres des structures de l'avion plus élevées que ces fréquences de rotation. Le choix d'orientation des fibres pourrait aider à atteindre cet objectif.

Grâce aux analyses du comportement transitoire des poutres il est possible de prédire les lieux où les cisaillements maximaux apparaissent. Une telle analyse pourrait être utile lorsqu'il faut amortir les vibrations grâce à des « patchs » viscoélastiques tel que décrit dans le mémoire de (Horel, 2013).

La méthode développée dans le cadre de cette recherche peut servir à développer une multitude de problèmes vibratoires, couplés ou non-couplés, à section pleine ou creuse, à section constante ou non constante. De plus, grâce à la formulation adoptée d'autres types de chargements que les impacts peuvent être simulés. Il sera également possible d'approfondir d'autres sujets plus complexes suite à cette recherche tel que les vibrations couplées flexion-torsion, mais également se diversifier pour étudier d'autres domaines tel que les vibrations libres et forcées des nanopoutres à une paroi ou à parois multiple ou les vibrations de matériaux décrits par les équations d'élasticité non-locales brièvement introduites dans la revue de littérature.

BIBLIOGRAPHIE

Amabili, M., & Garziera, R. (1999). A Technique For The Systematic Choice Of Admissible Functions In The Rayleigh–Ritz Method. *Journal of Sound and Vibration*, *224*(3), 519–539. doi:10.1006/jsvi.1999.2198

ASM Material Data Sheet. (n.d.). Retrieved February 3, 2014, from http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA2024T4

Azrar, L., Benamar, R., & White, R. G. (1999). Semi-Analytical Approach To The Non-Linear Dynamic Response Problem Of S–S And C–C Beams At Large Vibration Amplitudes Part I: General Theory And Application To The Single Mode Approach To Free And Forced Vibration Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, *224*(2), 183–207. doi:10.1006/jsvi.1998.1893

Banerjee, J. R. (2001). Frequency Equation And Mode Shape Formulae For Composite Timoshenko Beams. *Composite Structures*, *51*(4), 381–388. doi:10.1016/S0263-8223(00)00153-7

Banerjee, J. R. (2004). Development Of An Exact Dynamic Stiffness Matrix For Free Vibration Analysis Of A Twisted Timoshenko Beam. *Journal of Sound and Vibration*, *270*(1–2), 379–401. doi:10.1016/S0022-460X(03)00633-3

Bank, L. C. (1987). Shear coefficients for thin-walled composite beams. *Composite Structures*, *8*(1), 47–61. doi:10.1016/0263-8223(87)90015-8

Behera, L., & Chakraverty, S. (2013). Free Vibration Of Euler And Timoshenko Nanobeams Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials. *Applied Nanoscience*, 1–12. doi:10.1007/s13204-013-0202-4

Berthelot, J.-M. (1996). *Materiaux composites: comportement mecanique et analyse des structures*. Paris: Masson.

Cefic. (n.d.). Applications and Benefits of Multi-Walled Carbon Na notubes (MW CNT). Retrieved May 7, 2014, from https://www.google.ca/search?q=Applications+and+Benefits+of+Multi-Walled+Carbon+Na+notubes+(MW+CNT)+&ie=utf-8&oe=utf-8&aq=t&rls=org.mozilla:en-US:official&client=firefox-a&channel=sb&gfe_rd=cr&ei=KChqU9O2HuqM8Qe0soHwAw

Cheng, J., Xu, H., & Yan, A. (2006). Frequency Analysis Of A Rotating Cantilever Beam Using Assumed Mode Method With Coupling Effect. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *34*(1), 25–47. doi:10.1080/15367730500501587

Cheung, Y. K., & Zhou, D. (2000). Vibrations Of Moderately Thick Rectangular Plates In Terms Of A Set Of Static Timoshenko Beam Functions. *Computers & Structures*, *78*(6), 757–768. doi:10.1016/S0045-7949(00)00058-4

Cheung, Y. K., & Zhou, D. (2003). Vibration Of Tapered Mindlin Plates In Terms Of Static Timoshenko Beam Functions. *Journal of Sound and Vibration*, *260*(4), 693–709. doi:10.1016/S0022-460X(02)01008-8

Cytec. (n.d.). Cycom 5276-1. Retrieved February 26, 2014, from http://cytec.com/businesses/products/selector-guide/?refid=18&x=25&y=13

Ecsedi, I., & Dluhi, K. (2005). A Linear Model For The Static And Dynamic Analysis Of Non-Homogeneous Curved Beams. *Applied Mathematical Modelling*, *29*(12), 1211–1231. doi:10.1016/j.apm.2005.03.006

Ganesan, N., & Engels, R. C. (1992). Timoshenko beam finite elements using the assumed modes method. *Journal of Sound and Vibration*, *156*(1), 109–123. doi:10.1016/0022-460X(92)90815-F

Gonçalves, P. J. P., Brennan, M. J., & Elliott, S. J. (2007). Numerical Evaluation Of High-Order Modes Of Vibration In Uniform Euler–Bernoulli Beams. *Journal of Sound and Vibration*, *301*(3-5), 1035–1039. doi:10.1016/j.jsv.2006.10.012

Gong, S. W., Lam, K. Y., & Reddy, J. N. (1999). The Elastic Response Of Functionally Graded Cylindrical Shells To Low-Velocity Impact. *International Journal of Impact Engineering*, *22*(4), 397–417. doi:10.1016/S0734-743X(98)00058-X

Guo, Y. Q., Chen, W. Q., & Pao, Y.-H. (2008). Dynamic Analysis Of Space Frames: The Method Of Reverberation-Ray Matrix And The Orthogonality Of Normal Modes. *Journal of Sound and Vibration*, *317*(3–5), 716–738. doi:10.1016/j.jsv.2008.03.052

Han, S. M., Benaroya, H., & Wei, T. (1999). Dynamics Of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. *Journal of Sound and Vibration*, *225*(5), 935–988. doi:10.1006/jsvi.1999.2257

Horel, F. (2013, December). *Modélisation analytytique de l'amortissement des poutres composites sandwich contenant des couches viscoélastiques*. Ecole Polytechnique de Montréal, Montreal.

Jafari, A. A., Khalili, S. M. R., & Azarafza, R. (2005). Transient Dynamic Response Of Composite Circular Cylindrical Shells Under Radial Impulse Load And Axial Compressive Loads. *Thin-Walled Structures*, *43*(11), 1763–1786. doi:10.1016/j.tws.2005.06.009

Kim, C., & White, S. R. (1996). Analysis of thick hollow composite beams under general loadings. *Composite Structures*, *34*(3), 263–277. doi:10.1016/0263-8223(95)00146-8

Lam, K. Y., & Qian, W. (2000). Free Vibration Of Symmetric Angle-Ply Thick Laminated Composite Cylindrical Shells. *Composites Part B: Engineering*, *31*(4), 345–354. doi:10.1016/S1359-8368(99)00075-X

Lee, J., & Schultz, W. W. (2004). Eigenvalue Analysis Of Timoshenko Beams And Axisymmetric Mindlin Plates By The Pseudospectral Method. *Journal of Sound and Vibration*, *269*(3–5), 609–621. doi:10.1016/S0022-460X(03)00047-6

Lee, Y.-S., & Lee, K.-D. (1997). On The Dynamic Response Of Laminated Circular Cylindrical Shells Under Impulse Loads. *Computers & Structures*, *63*(1), 149–157. doi:10.1016/S0045-7949(96)00312-4

Leissa, A. W., & Qatu. (2011). *Vibrations of continuous systems*. New York: McGraw-Hill.

Leung, A. Y. T. (1988). Integration Of Beam Functions. *Computers & Structures*, *29*(6), 1087–1094.

Leung, A. Y. T. (1990). Recurrent Integration Of Beam Functions. *Computers & Structures - COMPUT STRUCT*, *37*(3), 277–282. doi:10.1016/0045-7949(90)90319-W

Mahamood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012). Functionally Graded Material: An overview. Retrieved from http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548

Majkut, L. (2009). Free And Forced Vibrations Of Timoshenko Beams Described By Single Difference Equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47 nr 1*, 193–210.

Mallick, P. K. (2008). *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Marchal, V. (2013, August). *Rapport de Stage : Modélisation mathématique de la réponse en vibration de poutres en composites à section creuse*. Ecole Polytechnique de Montréal.

Mohammadi, B., & Ghannadpour, S. A. M. (2011). Energy Approach Vibration Analysis Of Nonlocal Timoshenko Beam Theory. *Procedia Engineering*, *10*, 1766–1771. doi:10.1016/j.proeng.2011.04.294

Mostafavi Yazdi, S. J. A., & Irani, S. (2009). Transverse Vibration Of Double Cracked Beam Using Assumed Mode Method. In *4th International Conference on Recent Advances in Space Technologies, 2009. RAST '09* (pp. 156–160). doi:10.1109/RAST.2009.5158187

PCB Model 086C01. (n.d.). Retrieved February 20, 2014, from http://www.pcb.com/spec_sheet.asp?model=086C01

Qatu, M. S., & Iqbal, J. (2010). Transverse Vibration Of A Two-Segment Cross-Ply Composite Shafts With A Lumped Mass. *Composite Structures*, *92*(5), 1126–1131. doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.007

Reddy, J. N. (2007). Nonlocal Theories For Bending, Buckling And Vibration Of Beams. *International Journal of Engineering Science*, *45*(2–8), 288–307. doi:10.1016/j.ijengsci.2007.04.004

Ronald F. Gibson, E. O. A. (2007). Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. *Composites Science and Technology*, (1), 1–28. doi:10.1016/j.compscitech.2006.03.031

Ruta, P. (1999). Application Of Chebyshev Series To Solution Of Non-Prismatic Beam Vibration Problems. *Journal of Sound and Vibration*, *227*(2), 449–467. doi:10.1006/jsvi.1999.2348

Ruta, P. (2006). The Application Of Chebyshev Polynomials To The Solution Of The Nonprismatic Timoshenko Beam Vibration Problem. *Journal of Sound and Vibration - J SOUND VIB*, *296*(1), 243–263. doi:10.1016/j.jsv.2006.02.011

Tang, Y. (2003). Numerical Evaluation Of Uniform Beam Modes. *Journal of Engineering Mechanics-Asce - J ENG MECH-ASCE*, *129*(12). doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:12(1475)

Van Rensburg, N. F. J., & van der Merwe, A. J. (2006). Natural Frequencies And Modes Of A Timoshenko Beam. *Wave Motion*, *44*(1), 58–69. doi:10.1016/j.wavemoti.2006.06.008

Vo, T. P., & Lee, J. (2008a). Free vibration of thin-walled composite box beams. *Composite Structures*, *84*(1), 11–20. doi:10.1016/j.compstruct.2007.06.001

Vo, T. P., & Lee, J. (2008b). Free Vibration Of Thin-Walled Composite Box Beams. *Composite Structures*, *84*(1), 11–20. doi:10.1016/j.compstruct.2007.06.001

Wang, C. M., Tan, V. B. C., & Zhang, Y. Y. (2006). Timoshenko Beam Model For Vibration Analysis Of Multi-Walled Carbon Nanotubes. *Journal of Sound and Vibration*, *294*(4–5), 1060–1072. doi:10.1016/j.jsv.2006.01.005

Zhong, H., & Guo, Q. (2003). Nonlinear Vibration Analysis Of Timoshenko Beams Using The Differential Quadrature Method. *Nonlinear Dynamics*, *32*(3), 223–234. doi:10.1023/A:1024463711325

Ziane, N., Meftah, S. A., Belhadj, H. A., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2013a). Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams. *International Journal of Mechanical Sciences, 66,* 273–282. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.12.001

Ziane, N., Meftah, S. A., Belhadj, H. A., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2013b). Free Vibration Analysis Of Thin And Thick-Walled FGM Box Beams. *International Journal of Mechanical Sciences, 66,* 273–282. doi:10.1016/j.ijmecsci.2012.12.001

ANNEXES

ANNEXE I. Détails de la théorie du Chapitre 3

I.1. Matrices de souplesse dans des axes non-principaux

Les développements ci-dessous détaillent la théorie exposée dans le paragraphe 3.4

I.1.1. Matrice de souplesse dans des axes non-principaux par rotation dans le même plan

Les développements qui suivent s'effectuent dans le repère local de la poutre :

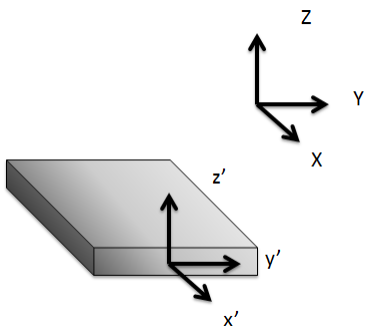


Figure i- 1: Représentation du repère global de la poutre (x, y, z) et du repère local (x', y', z')

Lorsque la relation entre les contraintes et les déformations est exprimée dans des axes autres que les axes principaux obtenus par rotation autour de l'axe « z », la relation suivante est obtenue après calcul (Berthelot, 1996) :

$$[\boldsymbol{\epsilon}'] = [\boldsymbol{S}'].[\boldsymbol{\sigma}']$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_{xx} \\ \epsilon'_{yy} \\ \epsilon'_{zz} \\ \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{1,1} & S'_{1,2} & S'_{1,3} & 0 & 0 & S'_{1,6} \\ S'_{1,2} & S'_{2,2} & S'_{2,3} & 0 & 0 & S'_{2,6} \\ S'_{1,3} & S'_{2,3} & S'_{3,3} & 0 & 0 & S'_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{4,4} & S'_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{4,5} & S'_{5,5} & 0 \\ S'_{1,6} & S'_{2,6} & S'_{3,6} & 0 & 0 & S'_{6,6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{zz} \\ \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 1}$$

Lorsque la matrice de souplesse est exprimée dans les axes de la poutre qui peuvent être des axes non principaux l'expression suivante est obtenue :

La relation entre les deux matrices $[\boldsymbol{S}]$ et $[\boldsymbol{S'}]$ est la suivante (Berthelot, 1996) :

$$[\boldsymbol{S'}] = [\boldsymbol{T_\epsilon}]^{-1}[\boldsymbol{S}][\boldsymbol{T_\sigma}] \qquad \text{i. 2}$$

où,
$$[\boldsymbol{T_\epsilon}] = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ sin^2(\theta) & cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \end{bmatrix} \qquad \text{i. 3}$$

$$[\boldsymbol{T_\sigma}] = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ sin^2(\theta) & cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

et où θ est un angle définit dans le sens positif de l'axe « z », c'est à dire avec la règle de la main droite.

Plus précisément, les composantes de la matrice i. 1 sont exprimées par les expressions suivantes :

$$S'_{1,1} = S_{1,1}\cos^4(\theta) + S_{2,2}\sin^4(\theta) + (2S_{1,2} + S_{6,6})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$$

$$S'_{1,2} = \left(S_{1,1} + S_{2,2} - S_{6,6}\right)\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + S_{1,2}(\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))$$

$$S'_{1,3} = S_{1,3}\cos^2(\theta) + S_{2,3}\sin^2(\theta)$$

$$S'_{1,6} = \left[2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) - S_{6,6}\right]sin(\theta)\cos^3(\theta) + \left[2\left(S_{1,2} - S_{2,2}\right) + S_{6,6}\right]cos(\theta)\sin^3(\theta)$$

$$S'_{2,2} = S_{1,1}\sin^4(\theta) + S_{2,2}\cos^4(\theta) + (2S_{1,2} + S_{6,6})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$$

$$S'_{2,3} = S_{1,3}\sin^2(\theta) + S_{2,3}\cos^2(\theta)$$

$$S'_{2,6} = \left[2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) - S_{6,6}\right]cos(\theta)\sin^3(\theta) + \left[2\left(S_{1,2} - S_{2,2}\right) + S_{6,6}\right]sin(\theta)\cos^3(\theta) \qquad \text{i. 4}$$

$$S'_{3,3} = S_{3,3}$$

$$S'_{3,6} = 2(S_{1,3} - S_{2,3})sin(\theta)cos(\theta)$$

$$S'_{4,4} = S_{4,4}\cos^2(\theta) + S_{5,5}\sin^2(\theta)$$

$$S'_{4,5} = (S_{5,5} - S_{4,4})sin(\theta)cos(\theta)$$

$$S'_{5,5} = S_{4,4}\sin^2(\theta) + S_{5,5}\cos^2(\theta)$$

$$S'_{6,6} = 2\left[2\left(S_{1,1} + S_{2,2} - 2S_{1,2}\right) - S_{6,6}\right]\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + S_{6,6}(\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))$$

Lorsque les propriétés selon les deux directions principales contenues dans le plan du stratifié sont identiques les relations suivantes sont valables :

$$E_1 = E_2$$
$$\nu_{1,2} = \nu_{2,1} \qquad \text{i. 5}$$

De plus, lorsque les deux directions principales forment un angle de 90°, les simplifications suivantes peuvent être effectuées :

$$G_{1,3} = G_{2,3}$$
$$\nu_{1,3} = \nu_{2,3} \qquad \text{i. 6}$$

Les coefficients de la matrice de souplesse 3.6 se simplifient d'Euler-Bernoulli :

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{1,2}}{E_1} & -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{1,2}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & -\frac{\nu_{1,3}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1,2}} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 7}$$

Lorsqu'en plus l'angle entre l'axe du stratifié et du premier axe principal vaut 45°, les matrices $[\boldsymbol{T_\epsilon}]$ et $[\boldsymbol{T_\sigma}]$ se simplifient d'Euler-Bernoulli :

$$\theta = +45\ deg \rightarrow [\boldsymbol{T_{\epsilon}}]_{\mathbf{45}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 8}$$

$$\theta = +45\ deg \rightarrow [\boldsymbol{T_{\sigma}}]_{\mathbf{45}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque ces deux cas sont réunis la matrice de souplesse [$\boldsymbol{S'}$] reprend la forme d'une matrice de souplesse orthotrope:

$$[\boldsymbol{S'}] = \begin{bmatrix} S'_{1,1} & S'_{1,2} & S'_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{1,2} & S'_{2,2} & S'_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{1,3} & S'_{2,3} & S'_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{6,6} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 9}$$

Dans ce cas particulier les modules de souplesse se simplifient de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
S'_{1,1} &= \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S'_{2,6} &= 0 \\
S'_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S'_{3,3} &= S_{3,3} \\
S'_{1,3} &= S_{1,3} & S'_{3,6} &= 0 \\
S'_{1,6} &= 0 & S'_{4,4} &= S_{5,5} \\
S'_{2,2} &= \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S'_{4,5} &= 0 \\
S'_{2,3} &= S_{1,3} & S'_{5,5} &= S_{5,5} \\
 & & S'_{6,6} &= 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{i. 10}
$$

Et donc la relation i. 9 prend la forme finale suivante :

$$
[\boldsymbol{S'}] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\
S_{1,3} & S_{1,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right)
\end{bmatrix}
\qquad \text{i. 11}
$$

En inversant la matrice de souplesse, la matrice de rigidité dans les axes non-principaux est obtenue :

$$
[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{C'}].[\boldsymbol{\epsilon}] \Leftrightarrow [\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{S'}]^{-\mathbf{1}}.[\boldsymbol{\epsilon}] \qquad \text{i. 12}
$$

Cette dernière possède la même forme que la matrice de souplesse i. 9 :

$$
[\boldsymbol{C'}] = \begin{bmatrix}
C'_{1,1} & C'_{1,2} & C'_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\
C'_{1,2} & C'_{2,2} & C'_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\
C'_{1,3} & C'_{2,3} & C'_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C'_{4,4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C'_{5,5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{6,6}
\end{bmatrix}
\qquad \text{i. 13}
$$

Lorsque les parois sont horizontales, les axes locaux de celle-ci sont identiques aux axes globaux. Les matrices de souplesse de parois horizontales dont l'orientation des fibres est de 0°\90° et de $\pm 45°$ respectivement sont les suivantes :

$$[\boldsymbol{S}]_{horiz} = [\boldsymbol{S}]$$
$$[\boldsymbol{S'}]_{horiz} = [\boldsymbol{S'}] \qquad \text{i. 14}$$

I.1.2. Matrice de souplesse dans des axes non-principaux par rotation dans un plan autre que celui des directions principales

La matrice de souplesse d'une paroi verticale dont les fibres possèdent une orientation de $0°/90°$ par rapport à l'axe longitudinal est la suivante :

$$[\boldsymbol{S}]_{vertic} = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{S}]\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma bis}}\right]^{-1} \qquad \text{i. 15}$$

Où

$$\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon bis}}\right] = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{seq}}\right][\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon}}]_{\mathbf{90}}\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{seq}}\right]^{-1}$$
$$\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma bis}}\right] = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{seq}}\right][\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}]_{\mathbf{90}}\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{seq}}\right]^{-1} \qquad \text{i. 16}$$

Avec,

$$\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{seq}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 17}$$

$$[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon}}]_{\mathbf{90}} = [\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}]_{\mathbf{90}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ces calculs résultent à l'expression ci-dessous :

$$[\boldsymbol{S}]_{vertic} = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,3} & S_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 18}$$

où les composantes $S_{i,j}$ sont celles de la matrice $[\boldsymbol{S}]$. De plus, la matrice de souplesse d'une paroi verticale dont les fibres possèdent une orientation de $\pm 45°$ par rapport à l'axe longitudinal est la suivante :

$$[\boldsymbol{S'}]_{vertic} = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon_{bis}}}\right][\boldsymbol{S'}]\left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma_{bis}}}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\Leftrightarrow [\boldsymbol{S'}]_{vertic} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{1,1} - S_{1,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 19}$$

où les composantes $S_{i,j}$ sont à nouveau celles de la matrice $[\boldsymbol{S}]$. Les développements détaillés des relations précédentes se trouvent dans l'ANNEXE VIII.

I.2. Équation constitutive et couplages vibratoires

Ce paragraphe détaille les calculs du paragraphe 3.6 du Chapitre 3.

Dans ce paragraphe il est prouvé que lorsqu'un stratifié classique possédant une séquence d'empilement symétrique est soumis à un effort de flexion pure, la déformation transversale n'est pas couplée avec une déformation longitudinale, ni en torsion. Le parallèle avec les poutres à section creuse est fait à la fin du paragraphe.

L'équation constitutive est la relation entre les résultantes des contraintes, par unité de largeur, et les déformations. Pour un stratifié classique où σ_{zz} et ϵ_{zz} sont négligés, la relation est donnée ci-dessous (Berthelot, 1996) :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,6} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,6} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{2,6} & B_{1,2} & B_{2,2} & B_{2,6} & 0 & 0 \\ A_{1,6} & A_{2,6} & A_{6,6} & B_{1,6} & B_{2,6} & B_{6,6} & 0 & 0 \\ B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,6} & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,6} & 0 & 0 \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{2,6} & D_{1,2} & D_{2,2} & D_{2,6} & 0 & 0 \\ B_{1,6} & B_{2,6} & B_{6,6} & D_{1,6} & D_{2,6} & D_{6,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{4,4} & F_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{4,5} & F_{5,5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad \text{i. 20}$$

Les composantes N représentent les efforts dans le plan, M les moments dans le plan et Q les efforts de cisaillement hors plan.

Pour un stratifié simple tel que représenté ci-dessous :

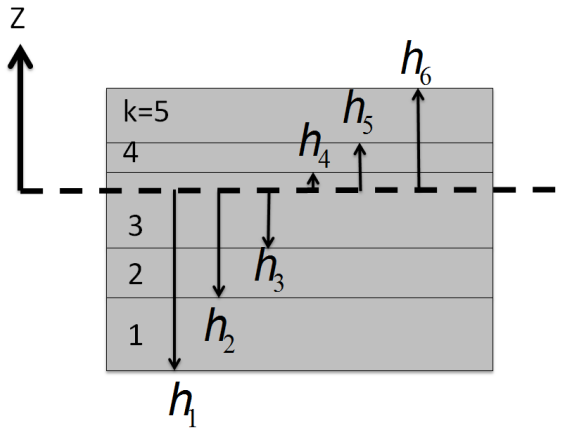


Figure i- 2: Définition des hauteurs h

Les résultantes des contraintes sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \int_{h_k}^{h_{k+1}} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i dz \quad \text{i. 21}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_i dz$$

Les expressions des déformations sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = [\boldsymbol{\epsilon}] = [\boldsymbol{\epsilon^0}] + z * [\boldsymbol{\kappa}]$$

$$[\boldsymbol{\epsilon^0}] = \begin{bmatrix}\epsilon^0_{xx}\\ \epsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}u_0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}v_0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}u_0 + \dfrac{\partial}{\partial x}v_0\end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{\kappa}] = \begin{bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\phi_x\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\phi_y\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\phi_x + \dfrac{\partial}{\partial x}\phi_y\end{bmatrix} \qquad \text{i. 22}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}w_0 + \phi_y\\ \dfrac{\partial}{\partial x}w_0 + \phi_x\end{bmatrix}$$

Il reste finalement les expressions des coefficients de la matrice carrée de l'équation constitutive i. 20 :

$$A_{i,j} = \sum_{i=1}^{k}(h_{i+1} - h_i)\left(C'_{i,j}\right)_i \; pour\; i,j = 1{,}2{,}6 \qquad B_{i,j} = \sum_{i=1}^{k}\left(h^2_{i+1} - h^2_i\right)\left(C'_{i,j}\right)_i \; pour\; i,j = 1{,}2{,}6$$

$$D_{i,j} = \sum_{i=1}^{k}\left(h^3_{i+1} - h^3_i\right)\left(C'_{i,j}\right)_i \; pour\; i,j = 1{,}2{,}6 \qquad F_{i,j} = \sum_{i=1}^{k}(h_{i+1} - h_i)\left(C'_{i,j}\right)_i \; pour\; i,j = 4{,}5 \qquad \text{i. 23}$$

Lorsque la séquence d'empilement dans un stratifié se réduit à une configuration symétrique et équilibrée les composantes $B_{i,j}$ sont nulles :

$$B_{i,j} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ M_x\\ M_y\\ M_{xy}\\ Q_y\\ Q_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ A_{1,6} & A_{2,6} & A_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{1,2} & D_{2,2} & D_{2,6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{1,6} & D_{2,6} & D_{6,6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{4,4} & F_{4,5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{4,5} & F_{5,5}\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\epsilon^0_{xx}\\ \epsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\\ \kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\\ \gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\end{bmatrix} \qquad \text{i. 24}$$

De plus, lorsque tous les plis du stratifié possèdent des matrices de souplesse de la même forme qu'un matériau orthotrope tel que représenté par l'équation i. 7 certaines composantes des matrices [$\boldsymbol{A}$] et [$\boldsymbol{D}$] ainsi que les composantes non-diagonales de la matrice [$\boldsymbol{F}$] sont nulles :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1,1} & D_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1,2} & D_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{6,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{5,5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 25}$$

Dans une notation plus concise il est possible de ré-exprimer la relation d'Euler-Bernoulli :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon_m} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma_c} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon_m} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{F^{-1}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 26}$$

Lorsqu'un stratifié encastré libre par exemple est soumis à un cas de chargement avec une flexion pure, les résultantes se simplifient d'Euler-Bernoulli :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 27}$$

Ceci résulte à une simplification dans les déformations :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 28}$$

Cette dernière simplification démontre que la déformation en cisaillement dans le plan et la torsion sont nulles lorsque la flexion pure est étudiée sur un stratifié symétrique et équilibré qui ne dispose que de plis orthotropes, dont les propriétés selon les deux axes dans le plan sont identiques et qui sont orientés selon l'axe longitudinal du stratifié où avec un angle de 45 degrés par rapport à l'axe longitudinal du stratifié.

La matrice des déformations dans le plan se simplifie donc également :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{i. 29}$$

Et les contraintes sont calculées tel que suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & 0 \\ C_{1,2} & C_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{6,6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & 0 \\ C_{1,2} & C_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{6,6} \end{bmatrix} . z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i. 30}$$

Les développements ci-dessus montrent que lorsqu'un stratifié classique possédant une séquence d'empilement symétrique est soumis à un effort de flexion pure, la déformation transversale n'est pas couplée avec une déformation longitudinale, ni en torsion. Dans les poutres à section creuse où les couches sont enroulées autour d'un mandrin, le seul moyen d'éviter d'avoir des couplages vibratoires avec des matériaux composites est d'utiliser des composites unidirectionnels avec des orientations de 0° ou 90° par rapport à l'axe de la poutre ou alors d'utiliser des composites bidirectionnels avec des orientations de $0°\backslash 90°$ ou $\pm 45°$.

I.3. Théories des poutres

Ce paragraphe détaille les calculs du paragraphe 3.8 du Chapitre 3.

Les théories de poutres présentées ci-dessous permettent de calculer les fréquences propres et les fonctions modales de poutres homogènes et isotropes de manière analytique, dans le cas de la théorie d'Euler-Bernoulli, et de manière numérique, dans le cas de Timoshenko, lorsque les cas sont relativement simples. Les théories des poutres utilisent donc les modules de rigidité de matériaux isotropes E et G, qui ne sont en réalité autre que E_1 et $G_{1,3}$.

Un cas simple classique est une poutre homogène isotrope rectiligne à section constante. Théoriquement aucune restriction ne s'applique au choix de la section du moment qu'elle ne présente pas de couplages. Il peut donc s'agir de sections creuses. Cependant, bien évidemment, il faut que la section possède au moins deux axes de symétries pour éviter les couplages vibratoires. Les fréquences propres d'une poutre représentent les fréquences auxquelles celle-ci vibre lorsqu'elle n'est pas soumise à un chargement externe. Cela peut être suite à un impact par exemple. Les fonctions modales sont associées à une fréquence propre spécifique et représentent les formes qu'adopterait une poutre vibrant uniquement aux fréquences associées. En pratique, en vibration libre, chaque poutre vibre selon une combinaison linéaire de ses modes propres.

Mathématiquement, pour les vibrations transverses, cela se traduit de la manière suivante (Han et al., 1999):

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * q_{W_i}(t) \qquad \text{i. 31}$$

Cette relation est valable pour les trois théories de poutres présentées ci-dessous. Cette équation dit que le déplacement transverse total est une combinaison linéaire d'une infinité de termes, composés d'une partie spatiale représentée par une fonction modale et d'une partie temporelle appelée coordonnée modale, qui est une variable inconnue. Les coordonnées modales seront déterminées grâce à la méthode des modes assumés présentée dans le chapitre 2.

I.3.1. Poutre d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli est un modèle de vibrations transversales qui néglige le cisaillement et l'inertie de rotation de la poutre. Dans le modèle d'Euler-Bernoulli les sections de la poutre restent perpendiculaires au plan neutre.

Les équations de déplacement se simplifient de la manière suivante, lorsque la fibre neutre ne subit pas de déplacement longitudinal:

$$u_0 = 0 \qquad \text{i. 32}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \phi_x \Leftrightarrow \phi_x = -\frac{\partial}{\partial x} w_0 \qquad \text{i. 33}$$

L'équation ci-dessus traduit le fait que l'angle de la section par rapport à la verticale est égal à la pente de la fibre neutre en chaque point. Les sections sont donc bien perpendiculaires à la courbe de la fibre neutre. Dans le modèle d'Euler-Bernoulli il n'existe qu'une seule coordonnée indépendante, w_0.

En injectant la relation i. 32 dans l'équation 3.23, les relations ci-dessous sont obtenues :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_0 - z * \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 = -z * \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0 \qquad \text{i. 34}$$

I.3.1.1. Équation de mouvement et fonctions modales de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

L'équation de mouvement adimensionnelle de la poutre d'Euler-Bernoulli est la suivante (Han et al., 1999):

$$\rho^* A^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} w^*(\xi, t^*) + \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} w^*(\xi, t^*) = f^*(\xi, t^*) \qquad \text{i. 35}$$

Où ρ^* représente la masse volumique adimensionnelle, A^* l'aire de section adimensionnelle, t^* le temps adimensionnel, w^* le déplacement transverse adimensionnel, ξ la coordonnée longitudinale adimensionnelle et f^* la force de chargement adimensionnelle Il est possible de passer de la forme dimensionnelle à la forme adimensionnelle grâce aux relations suivantes tirées de l'article (Han et al., 1999) :

$$x = \xi * L$$
$$t = \frac{t^*}{\omega_1} \qquad \text{i. 36}$$

$$w(x,t) = w^*(\xi, t^*) * L$$

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * q_{W_i}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} (W_i^*(\xi) * L) * q_{W_i}^*(t^*)$$
$$= w^*(\xi, t^*) * L$$

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * \dot{q}_{W_i}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} (W_i^*(\xi) * L) * (\dot{q}_{W_i}^*(t^*) * \frac{1}{\omega_1})$$
$$= \dot{w}^*(\xi, t^*) * \frac{L}{\omega_1}$$

Donc,

$$W_i(x) = W_i^*(\xi) * L$$

$$q_{W_i}(t) = q_{W_i}^*(t^*) \qquad \text{i. 37}$$

$$\dot{q}_{W_i}(t) = \dot{q}_{W_i}^*(t^*) * \frac{1}{\omega_1}$$

De plus,

$$\rho^* = \frac{\rho * L^6 * \omega_1^2}{E_x * I}$$

$$A^* = \frac{A}{L^2} \qquad \text{i. 38}$$

$$f^*(\xi, t^*) = \frac{f\,(x,t) * L^3}{E_x * I}$$

Où E_x représente le module de Young selon l'axe « x » de la poutre, ω_1 la première fréquence propre qui est inconnue avant la résolution du problème, L la longueur de la poutre, I le second moment de surface. Les conditions limites sont les suivantes (Han et al., 1999):

$$\left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}\ \delta\left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi}\right)\right]_0^1 = 0 \qquad \left[\frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi^3}\ \delta(w^*)\right]_0^1 = 0 \qquad \text{i. 39}$$

et résultent aux équations suivantes pour une poutre encastrée-libre :

$$\left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}\right]_{\xi=1} = 0 \qquad \left[\frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi^3}\right]_{\xi=1} = 0$$
$$\left[\frac{\partial w^*}{\partial \xi}\right]_{\xi=0} = 0 \qquad [w^*]_{\xi=0} = 0 \qquad \text{i. 40}$$

La solution des équations d'Euler-Bernoulli est bien connue et largement utilisée. Dans le cas d'une poutre encastrée-libre les fonctions modales adimensionnelles pour les déplacements transverses de la fibre neutre ont la forme suivante (Han et al., 1999).

$$W_i^*(\xi) = \cosh(\beta_i^* * \xi) - \cos(\beta_i^* * \xi) - \sigma * [\sinh(\beta_i^* * \xi) - \sin(\beta_i^* * \xi)] \qquad \text{i. 41}$$

où
$$\sigma = \frac{\cosh(\beta_i^*) + \cos(\beta_i^*)}{\sinh(\beta_i^*) + \sin(\beta_i^*)} \qquad \text{i. 42}$$

$$\xi \in [0,1]$$

et où β_i^* est le nombre d'onde et est la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$1 + \cosh(\beta_i^*) * \cos(\beta_i^*) = 0 \qquad \text{i. 43}$$

Cette équation a été résolue grâce à la fonction « fsolve » de MATLAB. La relation ci-dessous exprime l'orthogonalité des fonctions modales.

$$\int_0^1 \rho^* * A^* * W_i^*(\xi) * W_j^*(\xi)\, d\xi = \delta_{ij} \qquad \text{i. 44}$$

L'orthogonalité des fonctions modales est une condition nécessaire pour pouvoir utiliser la technique de l'expansion modale traduite par la relation i. 31. Il est possible d'exprimer cette relation sous une autre forme (Han et al., 1999). L'utilité de cette représentation sera mise en évidence dans le chapitre 2 sur les modes assumés dans lequel les équations de mouvement forcées sont résolues.

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M(\boldsymbol{W_j^*}) d\xi = \delta_{ij} \qquad \text{i. 45}$$

où $M(\ \ )$ est un opérateur algébrique et $(\boldsymbol{W_i^*})$ est un vecteur colonne contenant les fonctions modales.

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi)\ ]$$
$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \rho^* A^* * \boldsymbol{W_i^*} \qquad \text{i. 46}$$

Voici les mêmes équations sous forme dimensionnelle:

$$W_i\ (x) = \cosh(\beta_i * x) - \cos(\beta_i * x) - \sigma * [\text{sinhh}(\beta_i * x) - \sin(\beta_i * x)]$$
$$\sigma = \frac{\cosh(\beta_i * L) - \cos(\beta_i * L)}{\sinh(\beta_i * L) - \sin(\beta_i * L)} \qquad \text{i. 47}$$
$$1 + \cosh(\beta_i * L) * \cos(\beta_i * L) = 0$$

La relation d'orthogonalité classique pour une poutre d'Euler-Bernoulli :

$$\int_0^L \rho * A * W_i\ (x) * W_j\ (x)\ dx = \delta_{ij} \qquad \text{i. 48}$$

I.3.1.2. Manipulation de l'expression des fonctions modales

En théorie, les fonctions modales sont orthogonales entre elles. Cependant, lorsqu'elles sont implémentées dans un modèle informatique elles ne le restent pas à cause d'erreurs numériques. Ce phénomène a été étudié pour les poutres d'Euler-Bernoulli par (Gonçalves et al., 2007; Leung, 1988, 1990; Tang, 2003). Le problème des erreurs numériques peut survenir lorsque la précision n'est pas suffisamment grande, c'est-à-dire lorsque le nombre de chiffres derrière la virgule flottante ne suffisent pas pour représenter les chiffre. Un exemple d'un tel chiffre est $\frac{10}{3}$, où une dizaine de chiffres significatifs ne suffisent pas pour représenter le chiffre.

Les erreurs numériques apparaissent à partir d'un certain mode (Gonçalves et al., 2007; Leung, 1988, 1990; Tang, 2003) et se manifestent lorsque les relations d'orthogonalité ne sont plus vérifiées. Ces erreurs sont générées lors de la soustraction entre le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique dans l'expression de la fonction modale. En effet, à partir d'un certain nombre d'onde les valeurs de ces deux termes deviennent très grandes et presque égales. Cependant, numériquement, leur soustraction résulte à un zéro.

La stratégie pour faire disparaître cette soustraction de grands nombres consiste à utiliser la propriété suivante :

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \qquad \text{i. 49}$$

(Gonçalves et al., 2007) ont manipulé l'expression des fonctions modales d'une poutre doublement encastrée de la manière suivante :

$$W^* = \cosh(b * \xi) - \cos(b * \xi) - \sigma * (\sinh(b * \xi) - \sin(b * \xi)) \quad \xi \in [0,1] \qquad \text{i. 50}$$

Où,
$$\sigma = \frac{\cosh(b) - \cos(b)}{\sinh(b) - \sin(b)} \overset{b \gg 1}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{i. 51}$$

Les erreurs numériques vont apparaître lorsque l'argument des fonctions hyperboliques $b * x$ est le plus grand, c'est-à-dire lorsque $b \gg 1$ et $x \approx 1$.

On pose dès le début que :

$$\sigma = 1 + v \Leftrightarrow v = \frac{\cosh(b) - \cos(b)}{\sinh(b) - \sin(b)} - 1$$
$$= \frac{\cosh(b) - \cos(b) - \sinh(b) + \sin(b)}{\sinh(b) - \sin(b)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} - \cos(b) + \sin(b)}{\sinh(b) - \sin(b)} \qquad \text{i. 52}$$

Ce n'est pas un hasard si on fait apparaître un "1" dans l'expression de σ. En effet, le coefficient du cosinus hyperbolique est unitaire lui aussi. De cette manière le cosinus hyperbolique est regroupé avec une des deux instances du sinus hyperboliques, afin d'utiliser l'équation i. 49. Sachant que :

$$\sinh(b) = \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

$$v = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} - \cos(b) + \sin(b)}{\sinh(b) - \sin(b)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} - \cos(b) + \sin(b)}{\frac{e^b - e^{-b}}{2} - \sin(b)} \qquad \text{i. 53}$$

$$= \frac{e^b}{e^b} * \frac{2 * \mathrm{e}^{-2\mathrm{b}} - 2 * \cos(b) * e^{-b} + 2 * \sin(b) * e^{-b}}{1 - e^{-2b} - 2 * \sin(b) * e^{-b}}$$

$$= \frac{2 * \mathrm{e}^{-2\mathrm{b}} - 2 * \cos(b) * e^{-b} + 2 * \sin(b) * e^{-b}}{1 - e^{-2b} - 2 * \sin(b) * e^{-b}}$$

$$v \overset{b \gg 1}{\longrightarrow} \frac{0 - 0 + 0}{1} = 0$$

La limite de v tend bien vers 0. Ceci est cohérent puisque la limite de σ tend vers 1. En réinjectant l'expression de i. 52 dans i. 50 l'expression (Gonçalves et al., 2007) est obtenue :

et donc, $$W^* = e^{-b*\xi} - \cos(b * \xi) + (1 + v)\sin(b * \xi) - v\sinh(b * \xi) \qquad \text{i. 54}$$

Cette expression, ne fait plus apparaître de soustraction de grands nombres.

La forme de base des fonctions modales d'une poutre encastrée-libre est la même qu'une poutre doublement encastrée. En appliquant la même procédure qu'avant l'expression suivante est obtenue :

$$W^* = e^{-b*\xi} - \cos(b * \xi) + (1 + v)\sin(b * \xi) - v\sinh(b * \xi) \qquad \text{i. 55}$$

Avec $$v = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} + \cos(b) - \sin(b)}{\sinh(b) + \sin(b)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{b}} + \cos(b) - \sin(b)}{\frac{e^b - e^{-b}}{2} + \sin(b)} \qquad \text{i. 56}$$

L'expression i. 55 permet donc de réduire significativement les erreurs numériques par rapport à l'expression initiale.

I.3.2. Poutre de cisaillement et de Timoshenko

Contrairement au modèle d'Euler-Bernoulli les modèles de poutres de cisaillement et de Timoshenko prennent en compte le cisaillement. Les simplifications faites pour la théorie d'Euler-Bernoulli ne sont donc pas applicables. Reprenons la relation du cisaillement 3.11 :

$$\frac{\partial}{\partial x} w_0 = \alpha_x + \gamma_{xy}$$

Où $\alpha_x = -\phi_x$. Le symbole α est introduit afin de faire le passage entre les équations de (Berthelot, 1996) et (Han et al., 1999).

L'angle de cisaillement γ_{xz} s'additionne à l'angle du moment de flexion α_x. La pente de la fibre neutre est donc plus élevée que dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli.

Dans les théories des poutres de cisaillement et des poutres de Timoshenko, il existe deux coordonnées indépendantes.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x) * q_{W_i}(t)$$
$$\alpha_x(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x) * q_{PSI_i}(t) \qquad \text{i. 57}$$

Cependant, l'hypothèse que le déplacement transverse et l'angle dû au moment de flexion sont gouvernés par les mêmes coordonnées modales est faite (Han et al., 1999). Ceci se traduit par :

$$q_i(t) = q_{W_i}(t) = q_{PSI_i}(t) \qquad \text{i. 58}$$

Une notation qui sera utile dans le chapitre 2 est introduite (Han et al., 1999) :

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w(x,t) \\ \alpha_x(x,t) \end{bmatrix} \qquad \text{i. 59}$$

et donc,

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{bmatrix} W_i(x) \\ PSI_i(x) \end{bmatrix} * q_i(t)$$
$$\boldsymbol{w}^* = \begin{bmatrix} w^* \\ \alpha_x^* \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix} * q_i^*(t^*) \qquad \text{i. 60}$$

I.3.2.1. Équations de mouvement et fonctions modales de la poutre de cisaillement

La poutre de cisaillement dispose de deux équations de mouvement (Han et al., 1999):

$$\rho^* A^* \frac{\partial^2}{\partial {t^*}^2} w^*(\xi, t^*) - k' G^* A^* \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w^*(\xi, t^*) - \frac{\partial}{\partial \xi} {\alpha_x}^*(\xi, t^*) \right) = f^*(\xi, t^*) \qquad \text{i. 61}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\alpha_x{}^*(\xi, t^*) + k'G^*A^*\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\, w^*(\xi, t^*) - \alpha_x{}^*(\xi, t^*)\right) = 0$$

où G^* est le module de cisaillement adimensionnel et G_{xz} le module de cisaillement transversal de la face « x » selon la direction « z ».

$$G^* = \frac{G_{xz} * L^4}{E_x * I} \qquad \text{i. 62}$$

Le facteur de forme k' est une constante calculée sur base de la forme géométrique de la section de la poutre étudiée, ainsi que du coefficient de Poisson du matériau étudié. Il s'agit d'un coefficient qui pondère l'énergie potentielle de cisaillement transversal pour prendre en compte un profil de cisaillement transversal variable à travers la hauteur de la section qui est en général considéré constant (Han et al., 1999). Dans cette recherche l'hypothèse est faite que l'expression du facteur de forme est celle d'une section creuse rectangulaire à parois minces donnée par la relation ix. 9 de l'ANNEXE IX:

$$k' = \frac{20}{48 - 3\frac{\nu_{xy}G_{xy}}{E_x}}$$

Le cas particulier d'un matériau isotrope résulte à la relation suivante :

$$k' = \frac{40(1+\nu)}{3(32+31\nu)}$$

Le modèle de Timoshenko est décrit par les conditions limites suivantes :

$$\left[\frac{\partial\, \alpha_x{}^*}{\partial \xi}\, \delta(\alpha_x{}^*)\right]_0^1 = 0 \qquad \left[k'G^*A^*\left(\frac{\partial\, w^*}{\partial \xi} - \alpha_x{}^*\right)\, \delta(w^*)\right]_0^1 = 0 \qquad \text{i. 63}$$

et résultent aux équations suivantes pour une poutre encastrée-libre :

$$\left[\frac{\partial\, {\alpha_x}^*}{\partial \xi}\right]_{\xi=1} = 0 \qquad \left[k' G^* A^* \left(\frac{\partial\, w^*}{\partial \xi} - {\alpha_x}^*\right)\right]_{\xi=1} = 0$$
$$[\,\delta({\alpha_x}^*)]_{\xi=0} = 0 \qquad [\delta(w^*)]_{\xi=0} = 0 \qquad \text{i. 64}$$

Les équations ci-dessus traduisent le fait qu'à l'extrémité encastrée le déplacement et l'angle de flexion sont nuls et qu'à l'extrémité libre la dérivée de l'angle de flexion et l'angle de cisaillement sont nuls. Les formes modales adimensionnelles du déplacement transverse de la fibre neutre et de l'angle dû aux moments de flexion des sections de la poutre sont les suivants (Han et al., 1999):

$$W_i^*(\xi) = \mathrm{C}_1 \sin(a_i^* \xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a_i^* \xi) + \mathrm{C}_3 \sinh(\beta_i^* \xi) + C_4 \cosh(\beta_i^* \xi)$$
$$PSI_i^*(\xi) = \mathrm{D}_1 \sin(a_i^* \xi) + \mathrm{D}_2 \cos(a_i^* \xi) + \mathrm{D}_3 \sinh(\beta_i^* \xi) + D_4 \cosh(\beta_i^* \xi) \qquad \text{i. 65}$$

Où a_i^* et β_i^* sont les deux nombres d'onde. Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\left(b_i^{*2} - a_i^{*2}\right) a_i^* b_i^* \sin(a_i^*) \sinh(b_i^*) + \left(b_i^{*4} + a_i^{*4}\right) \cos(a_i^*) \cosh(b_i^*) + 2 a_i^{*2} b_i^{*2} = 0 \qquad \text{i. 66}$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$b_i^* = a_i^* \sqrt{\frac{1}{\gamma^{*2} k^{*2} a_i^{*2} + 1}} \qquad \text{i. 67}$$

Avec $$\gamma^* = \sqrt{\frac{E_x}{k' * G_{xz}}} \text{ et } k^* = \sqrt{\frac{I}{A}} * \frac{1}{L} \qquad \text{i. 68}$$

Où k' est le facteur de correction du cisaillement (sans dimensions) qui dépend du coefficient de Poisson et de la forme géométrique de la section de la poutre, E_x, et G_{xz} sont le module de Young et le module de cisaillement dans les axes de la poutre respectivement, k^* est le rayon de giration, I est le second moment de surface et A est la surface de la section. Les deux variables γ^* et k^* sont adimensionnelles.

Pour une poutre encastrée libre, les valeurs des coefficients C et D sont les suivantes :

$$C_1 = 1 \qquad C_3 = -\frac{b_i^{*3}}{a_i^{*3}}$$

$$C_2 = -\frac{b_i^{*2}\left(b_i^* e^{b_i^*} - b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\, a_i^*\right)}{a_i^*\left(2b_i^{*2}\cos(a_i^*) + a_i^{*2}e^{b_i^*} + a_i^{*2}e^{-b_i^*}\right)} \qquad C_4 = -\frac{b_i^{*2}\left(b_i^* e^{b_i^*} - b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\, a_n^*\right)}{a_i^*\left(2b_i^{*2}\cos(a_i^*) + a_i^{*2}e^{b_i^*} + a_i^{*2}e^{-b_i^*}\right)}$$

i. 69

Avec $$D_1 = -\frac{b_i^{*2}}{a_i^*}\, C_2 \qquad D_2 = \frac{b_i^{*2}}{a_i^*} C_1$$

$$D_3 = \frac{a_i^{*2}}{b_i^*} C_4 \qquad D_4 = \frac{a_i^{*2}}{b_i^*} C_3$$

i. 70

Pour finir les fréquences propres sont calculées tel que suit :

$$\omega_i = \sqrt{a_i^{*2} - b_i^{*2}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} * \frac{1}{\gamma} \qquad \text{i. 71}$$

Les deux nombres d'onde peuvent être calculés numériquement. L'organigramme suivant présente la démarche pour calculer les solutions dans une gamme de valeurs du nombre d'onde a^* :

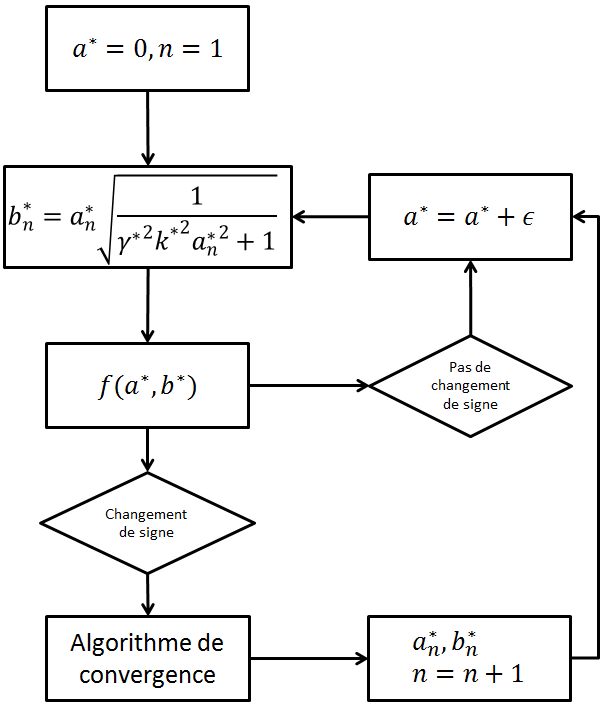

$a^* = 0, n = 1$
$b_n^* = a_n^* \sqrt{\frac{1}{\gamma^{*2} k^{*2} a_n^{*2} + 1}}$
$a^* = a^* + \epsilon$
$f(a^*, b^*)$
Pas de changement de signe
Changement de signe
Algorithme de convergence
a_n^*, b_n^*
$n = n + 1$

Figure i- 3 : Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de cisaillement

Où la fonction $f(\ \ )$ représente l'équation fréquentielle 3.44. L'algorithme de convergence utilise la fonction « fsolve » de MATLAB.

La relation d'orthogonalité des fonctions modales est identique que celle d'Euler-Bernoulli sous forme matricielle (Han et al., 1999) :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M\left(\boldsymbol{W_j^*}\right) d\xi = \delta_{ij} \qquad \text{i. 72}$$

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)]$$

et donc le vecteur de déplacement est exprimé d'Euler-Bernoulli,

$$\boldsymbol{w^*} = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{W_i^*} * q_i^*(t^*) \qquad \text{i. 73}$$

De plus l'opérateur $M(\ \ )$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix} \qquad \text{i. 74}$$

De raisonnements similaires pour la poutre d'Euler-Bernoulli peuvent être faits pour passer de la forme dimensionnelle à la forme adimensionnelle :

$$\alpha_x + \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} w_0 = \frac{1}{L} * \frac{\partial}{\partial \xi} (w_0^* * L) = \frac{\partial}{\partial \xi} w_0^* = {\alpha_x}^* + \gamma_{xy}^* \qquad \text{i. 75}$$

donc,

$$\alpha_x = {\alpha_x}^*$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^* \qquad \text{i. 76}$$

I.3.2.2. Équations de mouvement et fonctions modales de la théorie des poutres de Timoshenko

L'équation de mouvement adimensionnelle de la poutre de Timoshenko est la suivante (Han et al., 1999):

$$\rho^* A^* \frac{\partial^2}{\partial {t^*}^2} w^*(\xi, t^*) - k' G^* A^* \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w^*(\xi, t^*) - \frac{\partial}{\partial \xi} {\alpha_x}^*(\xi, t^*) \right) = f^*(\xi, t^*)$$
$$\rho^* I^* \frac{\partial^2}{\partial {t^*}^2} {\alpha_x}^*(\xi, t^*) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} {\alpha_x}^*(\xi, t^*) - k' G^* A^* \left(\frac{\partial}{\partial \xi} w^*(\xi, t^*) - {\alpha_x}^*(\xi, t^*) \right) = 0 \qquad \text{i. 77}$$

où I^* est le second moment de surface adimensionnel.

$$I^* = \frac{I}{L^4} \qquad \text{i. 78}$$

Les conditions limites pour une poutre de Timoshenko sont identiques que pour une poutre de cisaillement:

$$\left[\frac{\partial {\alpha_x}^*}{\partial \xi} \delta({\alpha_x}^*) \right]_0^1 = 0 \qquad \left[k' G^* A^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} - {\alpha_x}^* \right) \delta(w^*) \right]_0^1 = 0 \qquad \text{i. 79}$$

et résultent aux mêmes équations que i. 64 pour une poutre encastrée-libre :

$$\left[\frac{\partial {\alpha_x}^*}{\partial \xi}\right]_{\xi=1} = 0 \qquad \left[k' G^* A^* \left(\frac{\partial\, w^*}{\partial \xi} - {\alpha_x}^*\right)\right]_{\xi=1} = 0$$
$$[\,\delta({\alpha_x}^*)]_{\xi=0} = 0 \qquad [\delta(w^*)]_{\xi=0} = 0 \qquad \text{i. 80}$$

De même que la poutre de cisaillement, la poutre de Timoshenko possède également deux fonctions modales. Celle du déplacement transversal de la fibre neutre et celle de l'angle de flexion des sections de la poutre et dépendent elles-mêmes des deux nombres d'onde a_i^* et b_i^*. Par contre, les expressions des formes modales dépendent aussi de la valeur de a_i^*. En effet, dans le cas où $a_i^* < a_c^*$ donné par l'équation 3.58 les fonctions modales prennent la forme classique (Han et al., 1999):

$$W_i^*(\xi) = \mathrm{C}_1 \sin(a_i^*\xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a_i^*\xi) + \mathrm{C}_3 \sinh(\beta_i^*\xi) + C_4 \cosh(\beta_i^*\xi)$$
$$PSI_i^*(\xi) = \mathrm{D}_1 \sin(a_i^*\xi) + \mathrm{D}_2 \cos(a_i^*\xi) + \mathrm{D}_3 \sinh(\beta_i^*\xi) + D_4 \cosh(\beta_i^*\xi) \qquad \text{i. 81}$$

Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\left({a_i^*}^2 - {b_i^*}^2\right)\sin(a_i^*)\sinh(b_i^*) -$$
$$-\frac{a_i^* b_i^* \left({a_i^*}^4 + {a_i^*}^4 {\gamma^*}^4 + 4 * {\gamma^*}^2 {a_i^*}^2 {b_i^*}^2 + {b_i^*}^4 {\gamma^*}^4 + {b_i^*}^4\right)}{\left({b_i^*}^2 + {\gamma^*}^2 {a_i^*}^2\right)\left({a_i^*}^2 + {\gamma^*}^2 {b_i^*}^2\right)} \cos(a_i^*)\cosh(b_i^*) - \qquad \text{i. 82}$$
$$-2a_i^* b_i^* = 0$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\frac{\left({\gamma^*}^2 {b_i^*}^2 + {a_i^*}^2\right)\left({a_i^*}^2 {\gamma^*}^2 + {b_i^*}^2\right)}{\left({a_i^*}^2 - {b_i^*}^2\right)\left(1 + {\gamma^*}^2\right)} = \frac{1}{{k^*}^2} \qquad \text{i. 83}$$

Le nombre d'onde critique a_c vaut :

$$a_c^* = \frac{1}{k^*}\sqrt{\frac{1}{{\gamma^*}^2} + 1} \qquad \text{i. 84}$$

Dans le cas d'une poutre encastrée libre les coefficients possèdent les valeurs suivantes :

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = -\frac{2\sin(a_i^*)\,a_i^{*3} + a_i^{*2}b_i^* e^{b_i^*} - a_i^{*2}b_i^* e^{-b_i^*} + 2\sin(a_i^*)\,b_i^{*2}\gamma^{*2}a_i^* - \gamma^{*2}b_i^{*3}e^{-b_i^*} + \gamma^{*2}b_i^{*3}e^{b_i^*}}{a_i^*\left(2a_i^{*2}\cos(a_i^*) + 2\cos(a_i^*)\,b_i^{*2}\gamma^{*2} + b_i^{*2}e^{b_i^*} + b_i^{*2}e^{-b_i^*} + \gamma^{*2}a_i^{*2}e^{b_i^*} + \gamma^{*2}a_i^{*2}e^{-b_i^*}\right)}$$

$$= -\frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)} \qquad \text{i. 85}$$

$$C_3 = -\frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2}b_i^{*2}\right)b_i^*}{a_i^*\left(b_i^{*2} + \gamma^{*2}a_i^{*2}\right)}$$

$$C_4 = -C_2 = \frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^2 * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^2 * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^2 * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_1 = -\frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2}b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right)a_i^*}C_2$$

$$= \frac{\left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right)^2 * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{b_i^*}\right)\right)}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * a_i^{*2} * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_2 = \frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2}b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right)a_i^*}C_1 = \frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2}b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right)a_i^*} \qquad \text{i. 86}$$

$$D_3 = \frac{b_i^{*2} + \gamma^{*2}a_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right)b_i^*}C_4$$

$$= \frac{\left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) * \left(2 * \sin(a_i^*) * a_i^* + b_i^* * \left(e^{b_i^*} - e^{-b_i^*}\right)\right)}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * b_i^* * a_i^* * \left(2 * \cos(a_i^*) * \left(a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}\right) + \left(b_i^{*2} + \gamma^{*2} * a_i^{*2}\right) * \left(e^{b_i^*} + e^{-b_i^*}\right)\right)}$$

$$D_4 = \frac{b_i^{*2} + \gamma^{*2}a_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right)b_i^*}C_3 = -\frac{a_i^{*2} + \gamma^{*2} * b_i^{*2}}{\left(1 + \gamma^{*2}\right) * a_i^*}$$

L'expression des fréquences propres en fonction des nombres d'onde est la suivante :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\left(a_i^{*2} - b_i^{*2}\right)}{1+\gamma^{*2}}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} \qquad \text{i. 87}$$

Cependant, lorsque $a_i^* > a_c^*$, b_i^* est remplacé par $i * \tilde{b}_i$ et donc les fonctions modales deviennent :

$$\begin{aligned} W_i^*(\xi) &= \widetilde{C_1} * \sin(a_i^* * \xi) + \widetilde{C_2} * \cos(a_i^* * \xi) + \widetilde{C_3} * \sin\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) + \widetilde{C_4} * \cos\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) \\ PSI_i^*(\xi) &= \widetilde{D_1} * \sin(a_i^* * \xi) + \widetilde{D_2} * \cos(a_i^* * \xi) + \widetilde{D_3} * \sin\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) + \widetilde{D_4} * \cos\left(\widetilde{\beta_i^*} * \xi\right) \end{aligned} \qquad \text{i. 88}$$

Dans le cas de poutres encastrées libres, ces deux variables sont la solution de l'équation fréquentielle suivante :

$$\begin{aligned} &\left(a_i^{*2} + \widetilde{b_i^*}^2\right)\sin(a_i^*)\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \\ &-\frac{a_i^*\widetilde{b_i^*}\left(a_i^{*4} + a_i^{*4}\gamma^{*4} - 4*\gamma^{*2}a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}^2 + \widetilde{b_i^*}^4\gamma^{*4} + \widetilde{b_i^*}^4\right)}{\left(-\widetilde{b_i^*}^2 + \gamma^{*2}a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2\right)}\cos(a_i^*)\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \\ &-2a_i^*\widetilde{b_i^*} = 0 \end{aligned} \qquad \text{i. 89}$$

De plus, les deux nombres d'onde sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\frac{\left(-\gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2 + a_i^{*2}\right)\left(a_i^{*2}\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\right)}{\left(a_i^{*2} + \widetilde{b_i^*}^2\right)\left(1+\gamma^{*2}\right)} = \frac{1}{k^{*2}} \qquad \text{i. 90}$$

Dans le cas d'une poutre encastrée libre les coefficients possèdent les valeurs suivantes :

$$\widetilde{C_1} = 1$$

$$\widetilde{C_2} = -\frac{\sin(a_i^*)\,a_i^{*3} - a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right) - \sin(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2}a_i^* + \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^3\sin\left(\widetilde{b_i^*}\right)}{a_i^*\left(a_i^{*2}\cos(a_i^*) - \cos(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right) + \gamma^{*2}a_i^{*2}\cos\left(\widetilde{b_i^*}\right)\right)} \qquad \text{i. 91}$$

$$\widetilde{C_3} = -\frac{\left(a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2\right)\widetilde{b_i^*}}{a_i^*\left(-\widetilde{b_i^*}^2 + \gamma^{*2}a_i^{*2}\right)}$$

$$\widetilde{C_4} = \frac{\sin(a_i^*)\, a_i^{*3} - a_i^{*2}\widetilde{b_i^*}\sin(\widetilde{b_i^*}) - \sin(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2}a_i^* + \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^3\sin(\widetilde{b_i^*})}{a_i^*\left(a_i^{*2}\cos(a_i^*) - \cos(a_i^*)\,\widetilde{b_i^*}^2\gamma^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\cos(\widetilde{b_i^*}) + \gamma^{*2}a_i^{*2}\cos(\widetilde{b_i^*})\right)} = -\widetilde{C_2}$$

$$\widetilde{D_1} = -\frac{a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2}{(1+\gamma^{*2})a_i^*}\widetilde{C_2} \qquad \widetilde{D_2} = \frac{a_i^{*2} - \gamma^{*2}\widetilde{b_i^*}^2}{(1+\gamma^{*2})a_i^*}\widetilde{C_1}$$

$$\widetilde{D_3} = -\frac{\widetilde{b_i^*}^2 - \gamma^{*2}a_i^{*2}}{(1+\gamma^{*2})\widetilde{b_i^*}}\widetilde{C_4} \qquad \widetilde{D_4} = \frac{\widetilde{b_i^*}^2 - \gamma^{*2}a_i^{*2}}{(1+\gamma^{*2})\widetilde{b_i^*}}\widetilde{C_3} \qquad \text{i. 92}$$

L'expression des fréquences propres en fonction des nombres d'onde est la suivante :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\left(a_i^{*2} - \widetilde{b_i^*}^2\right)}{1+\gamma^{*2}}} * \sqrt{\frac{E_x}{\rho L^2}} \qquad \text{i. 93}$$

Les deux nombres d'onde peuvent être calculés numériquement. Les organigrammes suivants présentent la démarche en deux étapes, pour calculer les nombres d'onde pour toutes les gammes de valeurs :

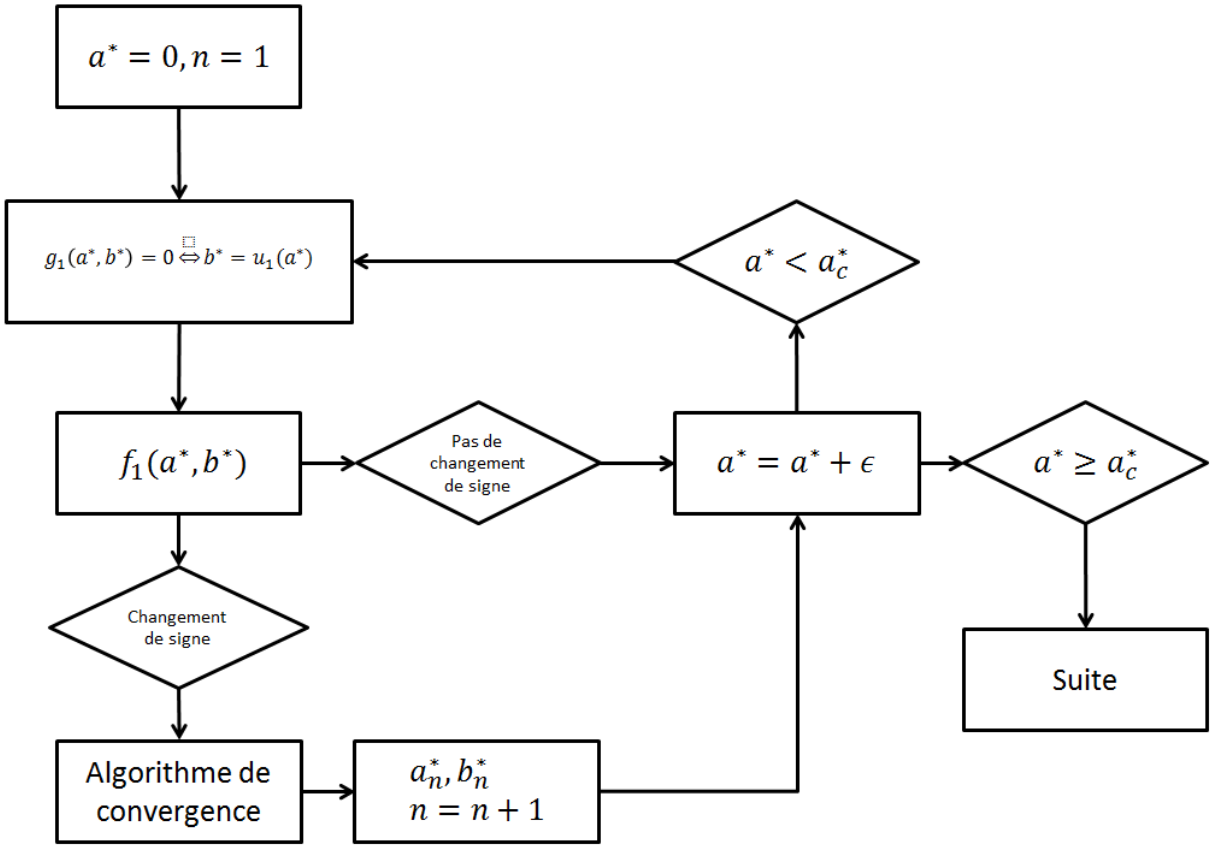


Figure i- 4 :Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a^* < a_c^*$

où g_1 représente l'équation 3.57 et f_1 représente l'équation fréquentielle 3.56. La manière d'isoler le nombre d'onde b^* est montré dans l'annexe 2.

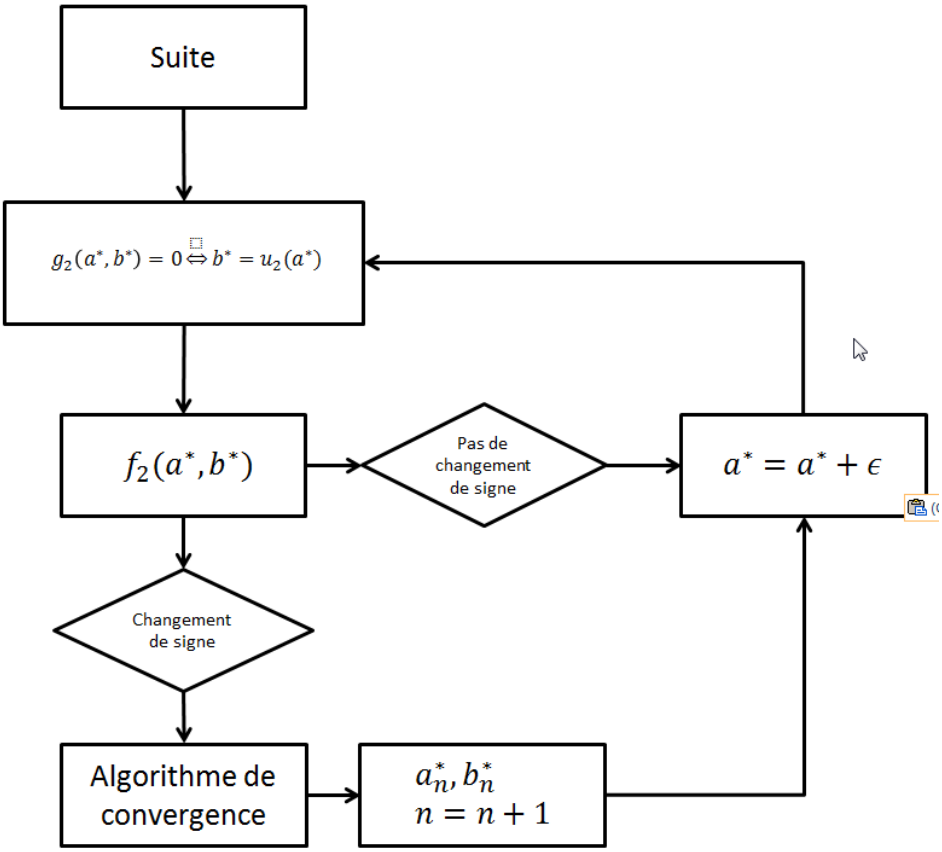


Figure i- 5 :Méthodologie de résolution des nombres d'onde de la poutre de Timoshenko lorsque $a^* > a_c^*$

où g_1 représente l'équation 3.64 et f_1 représente l'équation fréquentielle 3.63. La manière d'isoler le nombre d'onde $(\widetilde{b^*})$ est montré dans l'annexe 2.

La relation d'orthogonalité des fonctions modales est identique que celle d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sous forme matricielle (Han et al., 1999):

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} . M(\boldsymbol{W_j^*}) d\xi = \delta_{ij}$$

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)] \qquad \text{i. 94}$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix}$$

I.3.2.3. Manipulation de l'expression des fonctions modales

La méthode de (Gonçalves et al., 2007) a été généralisée dans le but d'obtenir des fonctions modales d'une poutre encastrée-libre de Timoshenko sans erreurs numériques. Il faut commencer par l'expression de la fonction modale du déplacement transverse :

$$W^*(\xi) = \mathrm{C}_1 \sin(a\,\xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a\,\xi) + \mathrm{C}_3 \sinh(\beta\,\xi) + C_4 \cosh(\beta\,\xi) \qquad \text{i. 95}$$

Où $C_1 = 1$ et C_2, C_3, C_4 sont exprimées par les équations 3.59. L'expression précédente se simplifie comme suit :

$$W^*(\xi) = \sin(a\,\xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a\,\xi) + \mathrm{C}_3 \sinh(\beta\,\xi) + C_4 \cosh(\beta\,\xi) \qquad \text{i. 96}$$

La logique reste la même que lors de la manipulation de la fonction modale d'Euler-Bernoulli. Il faut faire disparaitre l'opération mathématique entre le sinus et le cosinus hyperbolique qui peuvent prendre de très grandes valeurs pour des nombres d'onde élevés. Posons :

$$C_3 = -C_4 + B \Leftrightarrow B = C_3 + C_4 \qquad \text{i. 97}$$

$$W^*(\xi) = \sin(a\,\xi) + \mathrm{C}_2 \cos(a\,\xi) + \mathrm{B} \sinh(\beta\,\xi) + C_4 \mathrm{e}^{-\beta\,\xi} \qquad \text{i. 98}$$

Passons à l'expression de la fonction modale d'angle de flexion.

$$PSI^*(\xi) = \mathrm{D}_1 \sin(a\,\xi) + \mathrm{D}_2 \cos(a\,\xi) + \mathrm{D}_3 \sinh(\beta\,\xi) + D_4 \cosh(\beta\,\xi) \qquad \text{i. 99}$$

Où D_1, D_2, D_3, D_4 sont définis par les expressions 3.60. Posons,

$$D_3 = -D_4 + F \Leftrightarrow F = D_3 + D_4 \qquad \text{i. 100}$$

$$PSI^*(\xi) = \mathrm{D}_1 \sin(a\,\xi) + \mathrm{D}_2 \cos(a\,\xi) + \mathrm{F} \sinh(\beta\,\xi) + D_4 \mathrm{e}^{-\beta\,\xi} \qquad \text{i. 101}$$

Les calculs présentés par la suite ont été réalisés grâce aux expressions manipulées. Le lecteur intéressé se réfèrera à l'annexe 3 pour plus de détails sur les fonctions modales manipulées de la théorie des poutres de Timoshenko.

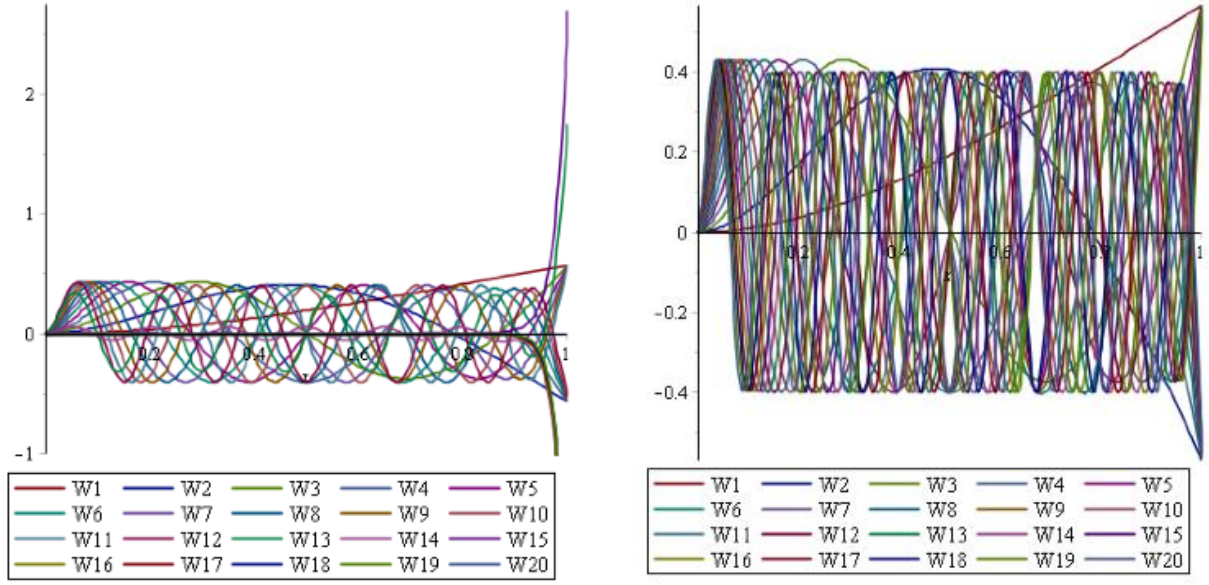
I.3.2.4. Exemple d'erreurs numériques sur les fonctions modales

Ce paragraphe a pour but d'illustrer les erreurs numériques qui peuvent apparaître dans les fonctions modales. L'exemple numérique a été réalisé avec une poutre pleine en aluminium possédant les caractéristiques suivantes :

Tableau i. 1 : Caractéristiques de la poutre aluminium

Caractéristiques de la poutre aluminium					
E	$7.31 * 10^{10}\ GPa$	ρ	$2780 \frac{kg}{m^3}$	γ	1.7516
G	$2.8 * 10^{-10}\ GPa$	s	442.96	L	$0.406\ m$

Seules les fonctions modales W^* seront analysées. Les graphiques suivants en traçant les fonctions modales obtenues grâce aux expressions classiques et aux expressions manipulées :



(a) (b)

Figure i- 6 : (a) Fonctions modales classiques, (b) Fonctions modales manipulées

Les erreurs numériques surviennent lorsque les nombres d'onde sont élevés, c'est à dire, pour des modes élevés et pour $\xi \approx 1$. Cependant, avec les expressions manipulées les erreurs numériques disparaîssent.

ANNEXE II. Détails de la théorie du Chapitre 4

Cette annexe détaille comment obtenir les matrices de masse, de rigidité et des chargements externes à partir des énergies et se réfère au paragraphe 4.2 du Chapitre 4.

Après avoir calculé les fonctions modales $W_i(x)$ et $PSI_i(x)$ sous leur forme dimensionnelle tel que décrit dans le Chapitre 2, il faut injecter les expressions des deux coordonnées indépendantes $w_0(x,t)$ et $\phi_x(x,t)$ dans les expressions des énergies potentielle et cinétique, qui dans le cas d'une poutre en flexion se résument à:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}\, dV \qquad \text{ii. 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}\, dV \qquad \text{ii. 2}$$

Où $\sigma_{i,i}$ et $\epsilon_{i,i}$ représentent les contraintes et déformations normales respectivement et $\sigma_{i,j}$ et $\epsilon_{i,j}$ représentent les contraintes et déformations de cisaillement respectivement. En reprenant les équations 3.11 et 3.25:

$$\sigma_{xx} = C_{1,1}\epsilon_{xx} = E_x\epsilon_{xx} = E_x z\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi_x\right)$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}w_0 - \alpha_x \qquad \text{ii. 3}$$

On obtient la relation suivante :

$$U = \frac{1}{2}\int_V E_x\epsilon_{xx}^2 + G_{xz}\gamma_{xz}^2\, dV \qquad \text{ii. 4}$$

Lorsqu'une poutre formée de plusieurs matériaux différents est étudiée, l'intégrale doit être calculée par partie pour que le module de Young et le module de cisaillement puissent changer de valeur lorsque l'intégrale passe d'un matériau à un autre. Lorsque le facteur de forme k' est intégré dans l'expression de l'énergie potentielle pour corriger la contribution du cisaillement l'équation précédente devient :

$$U = \frac{1}{2}\int_V E_x \epsilon_{xx}^2 + k' * G_{xz}\gamma_{xz}^2 \, dV \qquad \text{ii. 5}$$

Où k' est le facteur de forme donné par la relation ix. 9. En reprenant l'équation ii. 5.

$$U = \frac{1}{2}\int_V E_x \left(z\left(\frac{\partial}{\partial x}(-\alpha_x)\right)\right)^2 + k' G_{xz}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0 - \alpha_x\right)^2 \, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V E_x \left(z\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x)q_i(t)\right)\right)^2 + k' G_{xz}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x)q_i(t)\right) - \sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x)q_i(t)\right)^2 dV \qquad \text{ii. 6}$$

Une somme avec une infinité de termes n'est cependant pas calculable en pratique et la somme doit se limiter à n termes, c'est-à-dire les n modes.

$$U \approx \frac{1}{2}\int_V E_x \left(z\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n} PSI_i(x)q_i(t)\right)\right)^2 + k' G_{xz}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i(x)q_i(t)\right) - \sum_{i=1}^{n} PSI_i(x)q_i(t)\right)^2 dV \qquad \text{ii. 7}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x)q_i(t)\right)^2 + k' G_{xz}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}W_i(x) - PSI_i(x)\right)q_i(t)\right)^2 dV \qquad \text{ii. 8}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}.\boldsymbol{K}.\boldsymbol{q} \qquad \text{ii. 9}$$

où $\boldsymbol{q}$ est un vecteur colonne contenant les coordonnées modales et $\boldsymbol{K}$ est la matrice de raideur.

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad \text{ii. 10}$$

Avant de donner l'expression de $\boldsymbol{K}$ il est utile de mettre une propriété en évidence :

$$\left(\sum_{i=1}^{2} A_i f_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} B_i f_i\right) = A_1 B_1 f_1^2 + A_1 B_2 f_1 f_2 + A_2 B_1 f_2 f_1 + A_2 B_2 f_2^2$$

$$= A_1 B_1 f_1^2 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) f_1 f_2 + A_2 B_2 f_2^2$$

$$= [f_1 \quad f_2].\begin{bmatrix} A_1B_1 & \frac{(A_1B_2 + A_2B_1)}{2} \\ \frac{(A_1B_2 + A_2B_1)}{2} & A_2B_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \text{ii. 11}$$

Dans le cas particulier où $A_i = B_i$ l'expression ci-dessus est simplifiée de la manière suivante :

$$[f_1 \quad f_2].\begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 \\ A_1A_2 & A_2^2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \text{ii. 12}$$

Revenons à l'expression de l'énergie potentielle. En utilisant la relation précédente l'expression finale de la matrice de rigidité est obtenue :

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) \frac{\partial}{\partial x} PSI_j(x) + k' G_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial x} W_i(x) - PSI_i(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} W_j(x) - PSI_j(x)\right) dV \qquad \text{ii. 13}$$

$$pour\ i,j = 1..n$$

Cette manière de faire permet de créer une matrice ***K*** symétrique. Dans le cas où le cisaillement est négligé la relation suivante simplifie la matrice ***K* :**

$$PSI_i(x) = \frac{\partial}{\partial x} W_i(x) \qquad \text{ii. 14}$$

$$K_{i,j} = \int_V E_x z^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_j(x)\, dV \ \ pour\ i,j = 1..n \qquad \text{ii. 15}$$

La relation de départ de l'énergie cinétique est la suivante :

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} u\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} v\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} w\right)^2\right) dV \xrightarrow{v=0} \qquad \text{ii. 16}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_0 - z\,\alpha_x)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} w_0\right)^2\right) dV \xrightarrow{u_0=0}$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(z\,\alpha_x)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}w_0\right)^2\right) dV \qquad \text{ii. 17}$$

Dans cette expression l'intégrale du terme $\frac{\partial}{\partial t}(z\,\phi_x)$ va résulter à l'inertie de rotation. Ce terme est conservé dans le cas de la théorie des poutres de Timoshenko.

$$\rightarrow \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(z\sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x)q_i(t)\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x)q_i(t)\right)^2\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\left(z\sum_{i=1}^{+\infty} PSI_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} W_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2\right) dV$$

$$\approx \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\left(z\sum_{i=1}^{n} PSI_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} W_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho\left(z^2\left(\sum_{i=1}^{n} PSI_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} W_i(x)\dot{q}_i(t)\right)^2\right) dV \qquad \text{ii. 18}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}.\boldsymbol{M}.\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{ii. 19}$$

$$M_{i,j} = \int_V \rho z^2 PSI_i(x)PSI_j(x) + \rho W_i(x)W_j(x)\,dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad \text{ii. 20}$$

Lorsque le cisaillement est négligé la matrice de masse est simplifiée et une poutre de Rayleigh est obtenue :

$$M_{i,j} = \int_V \rho z^2 \frac{\partial}{\partial x}W_i(x)\frac{\partial}{\partial x}W_j(x) + \rho W_i(x)W_j(x)\,dV \;\; pour\; i,j = 1..n \qquad \text{ii. 21}$$

Pour la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, la simplification se fait d'Euler-Bernoulli :

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} w\right)^2 \, dV \qquad \text{ii. 22}$$

Et donc, $$M_{i,j} = \int_V \rho W_i(x) W_j(x) \, dV \;\; pour \; i,j = 1..n \qquad \text{ii. 23}$$

Pour finir, il faut également comptabiliser le travail des chargements externes. Seul des charges selon l'axe des « z » sont prises en compte.

$$\delta W = \int_0^L \big(f(x,t)\delta w(x,t)\big) \, dx = \boldsymbol{Q}\delta \boldsymbol{q}^T \qquad \text{ii. 24}$$

$$Q_i = \int_0^L f(x,t) W_i(x) \, dx \qquad \text{ii. 25}$$

ANNEXE III. Preuve théorique simplificatrice sur contraintes et déplacements transverses pour les théories des poutres

L'équation de mouvement dimensionnelle d'une poutre d'Euler-Bernoulli homogène isotrope est la suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t)\right)+m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t)=0 \qquad \text{iii. 1}$$

où $E(x)$ est le module de Young, $I(x)$ est le second moment de surface $m(x)$ est la masse surfacique de la section de la poutre et $w(x,t)$ est le déplacement transversal. L'équation se simplifie lorsque la section et les propriétés de la poutre sont constantes le long de l'axe de la poutre:

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}w(x,t)+m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t)=0 \qquad \text{iii. 2}$$

Il est possible de retrouver cette équation à partir du principe de Hamilton pour lequel les énergies potentielle et cinétique doivent être calculées.

$$\int_{t1}^{t2}(\delta T-\delta V)dt=0 \qquad \text{iii. 3}$$

où l'opérateur δ est l'opérateur du travail virtuel. L'expression de l'énergie cinétique est assez simple dans le cas de vibrations transverses lorsque l'effet Poisson est négligé.

$$T=\frac{1}{2}\int_V \rho\,(\dot{u}^2+v^2+\dot{w}^2)\,dV=\frac{1}{2}\int_V \rho\,\dot{w}^2\,dV \qquad \text{iii. 4}$$

L'énergie potentielle se simplifie d'Euler-Bernoulli lorsque le cisaillement et l'effet Poisson sont négligés.

$$U=\frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx}+\sigma_{yy}\epsilon_{yy}+\sigma_{zz}\epsilon_{zz}+\sigma_{xy}\gamma_{xy}+\sigma_{yz}\gamma_{yz}+\sigma_{xz}\gamma_{xz}\,dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx}\, dV \qquad \text{iii. 5}$$

La relation entre σ_{xx} et ϵ_{xx} dépend des hypothèses. En effet, la matrice de souplesse sans cisaillement est connue.

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3}\\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3}\\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{bmatrix} \qquad \text{iii. 6}$$

où

$$S_{i,i} = \frac{1}{E} \qquad \text{iii. 7}$$

$$S_{i,j} = -\frac{\nu}{E}$$

Alors, en inversant la matrice de souplesse la relation suivante est obtenue :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3}\\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{2,3}\\ C_{1,3} & C_{2,3} & C_{3,3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\end{bmatrix} \qquad \text{iii. 8}$$

Examinons les hypothèses suivantes :

1. $\sigma_{yy} \neq 0, \sigma_{zz} \neq 0$ et $\epsilon_{yy} \neq 0, \epsilon_{zz} \neq 0$, mais $\sigma_{yy}\epsilon_{yy}$ et $\sigma_{zz}\epsilon_{zz}$ sont négligeables devant $\sigma_{xx}\epsilon_{xx}$
2. $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ et $\epsilon_{yy} \neq 0, \epsilon_{zz} \neq 0$
3. $\sigma_{yy} \neq 0, \sigma_{zz} \neq 0$ et $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$
4. $\sigma_{yy} = \epsilon_{yy} = \sigma_{zz} = \epsilon_{zz} = 0$

D'après l'hypothèse 1 la relation ci-après est obtenue :

$$\sigma_{xx} = C_{1,1}\epsilon_{xx} + C_{1,2}\epsilon_{yy} + C_{1,3}\epsilon_{zz} \qquad \text{iii. 9}$$

où $C_{1,1} \neq E_x$.

Dans ce cas, le principe de Hamilton ne résultera pas à l'équation iii. 2. L'équation i.9 est valide sous la deuxième hypothèse également et l'énergie potentielle adopte la forme suivante.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz}\, dV \xrightarrow{\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0} \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx}\, dV = \\ = \frac{1}{2}\int_V \left(C_{1,1}\epsilon_{xx} + C_{1,2}\epsilon_{yy} + C_{1,3}\epsilon_{zz}\right) * \epsilon_{xx}\, dV \qquad \text{iii. 10}$$

Le principe de Hamilton n'aboutira toujours pas à l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli.

Sous l'hypothèse 3 la contrainte axiale prend l'expression suivante :

$$\sigma_{xx} = C_{1,1}\epsilon_{xx} + C_{1,2}\epsilon_{yy} + C_{1,3}\epsilon_{zz} \xrightarrow{\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}=0} C_{1,1}\epsilon_{xx}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz}\, dV \xrightarrow{\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}=0} \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx}\, dV = \qquad \text{iii. 11}$$

$$\frac{1}{2}\int_V C_{1,1}\epsilon_{xx}^2\, dV$$

Si cette expression de l'énergie potentielle est utilisée l'équation de mouvement suivante est obtenue :

$$C_{1,1} I \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x,t) + m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = 0 \qquad \text{iii. 12}$$

qui possède des fréquences propres différentes que celles d'une poutre d'Euler-Bernoulli puisque $C_{1,1} \neq E$.

Par contre, sous l'hypothèse 4 la matrice de souplesse se simplifie d'Euler-Bernoulli :

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3}\\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3}\\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3}\\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3}\\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \text{iii. 13}$$

Où les termes surlignés appartenant soit à la deuxième ou troisième ligne soit à la deuxième ou troisième colonne sont éliminés. Cette simplification ne peut en aucun cas être effectuée suite à l'inversion de la matrice de souplesse, au risque de calculer une mauvaise valeur du coefficient

de rigidité. Il est donc d'une importance capitale de bien connaître les hypothèses de départ. Suite à la simplification de l'équation iii. 13 la relation suivante est obtenue.

$$\Leftrightarrow [\epsilon_{xx}] = [S_{1,1}].[\sigma_{xx}] \Leftrightarrow \epsilon_{xx} = S_{1,1} * \sigma_{xx} \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{1}{S_{1,1}} * \epsilon_{xx}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{xx} = E * \epsilon_{xx} \qquad \text{iii. 14}$$

et donc, $$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\epsilon_{xx}\, dV = \frac{1}{2}\int_V E\, \epsilon_{xx}^2\, dV \qquad \text{iii. 15}$$

En appliquant le principe de Hamilton sous la quatrième hypothèse l'équation de mouvement des poutres d'Euler-Bernoulli tel que iii. 2 est obtenue :

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}w(x,t) + m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t) = 0$$

Cette étude théorique démontre que seule la quatrième hypothèse permet de retrouver l'équation d'Euler-Bernoulli iii. 2. Pour s'en persuader, une étude numérique a été réalisée afin d'illustrer les propos précédents. Les calculs sont réalisés avec une poutre en aluminium 2024-T4 dont le module de Young est le suivant :

$$E = 73.1 * 10^9\ Pa$$

Pour les hypothèses1,2 et 3 le coefficient de rigidité provenant de l'inversion de la matrice de souplesse vaut :

$$C_{1,1} = 10.83 * 10^{10}\ Pa$$

Dans le code de calcul, le coefficient de rigidité utilisé intervient à deux reprises. La première instance est dans les théories analytiques des poutres, qui dans le cas d'Euler-Bernoulli, ne sert qu'à calculer les fréquences propres et non les fonctions modales. Dans le cas des poutres de Timoshenko, le coefficient de rigidité a une influence sur les fonctions modales. La deuxième instance est dans le calcul de l'énergie potentielle. Il est possible de simuler 4 cas différents pour la théorie d'Euler-Bernoulli afin de voir l'influence des coefficients de rigidité utilisés :

Tableau iii. 1: 4 cas à simuler

# cas	Théorie analytique	Expression énergie potentielle
1	E_x	E_x
2	E_x	$C_{1,1}$
3	$C_{1,1}$	E_x
4	$C_{1,1}$	$C_{1,1}$

Avant de dévoiler les résultats des quatre cas simulés, les fréquences propres analytiques provenant de la théorie analytique d'Euler-Bernoulli sont comparées avec les fréquences propres expérimentales provenant des calculs de la méthode des modes assumés de la poutre pleine en aluminium de type 2024-T4 :

Tableau iii. 2 : Fréquences propres expérimentales de la poutre pleine d'aluminium 2024 T4

# mode	Fréquences propres expérimentales (Hz)
1	16
2	98
3	274,5
4	538

Les calculs de la méthode des modes assumés sont réalisés avec 10 modes. Attardons-nous initialement à savoir si les résultats analytiques sont plus proches des fréquences expérimentales avec le E plutôt qu'avec $C_{1,1}$.

Tableau iii. 3 : Comparaison des fréquences propres analytiques avec les fréquences propres expérimentales

# mode	Fréquences expérimentales (Hz)	Fréquences analytiques avec E_x (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)	Fréquences analytiques avec $C_{1,1}$ (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)
1	16	15,95	0,31%	19,42	21,38%
2	98	99,99	2,03%	121,7	24,18%
3	274,5	279,98	2,00%	340,73	24,13%
4	538	548,64	1,98%	667,58	24,09%

Les résultats ci-dessus montrent clairement que les fréquences analytiques calculées avec E sont significativement plus précises que celles calculées$C_{1,1}$.

Les tableaux ci-dessous illustrent les résultats obtenus avec la méthode des modes assumés pour chacun des quatre cas. Le cas 1 produit les valeurs suivantes :

Tableau iii. 4 : Résultats de simulation du cas 1

# mode	Fréquences expérimentales (Hz)	Fréquences approximatives (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)
1	16	15,95	0,31%
2	98	99,98	2,02%
3	274,5	279,92	1,97%
4	538	548,44	1,94%

Le cas 2 produit les valeurs suivantes :

Tableau iii. 5 : Résultats de simulation du cas 2

# mode	Fréquences expérimentales (Hz)	Fréquences approximatives (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)
1	16	19,42	21,38%
2	98	121,7	24,18%
3	274,5	340,73	24,13%
4	538	667,58	24,09%

Le cas 3 produit les valeurs suivantes :

Tableau iii. 6 : Résultats de simulation du cas 3

# mode	Fréquences expérimentales (Hz)	Fréquences approximatives (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)
1	16	15,96	0,25%
2	98	99,98	2,02%
3	274,5	279,9	1,97%
4	538	548,44	1,94%

Le cas 4 produit les valeurs suivantes :

Tableau iii. 7 : Résultats de simulation du cas 4

# mode	Fréquences expérimentales (Hz)	Fréquences approximatives (Hz)	Erreur par rapport à l'expérimental (Hz)
1	16	19,42	21,38%
2	98	121,7	24,18%
3	274,5	340,73	24,13%
4	538	667,58	24,09%

III.1. Conclusions

Les tableaux ci-dessus montrent que les fréquences approximatives sont les plus précises lorsque le E est utilisé dans l'expression de l'énergie potentielle, plutôt que $C_{1,1}$. Lorsque le coefficient $C_{1,1}$ est employé, les fréquences propres sont systématiquement surestimées.

Le cas numérique le plus intéressant à utiliser est, sans aucun doute, le cas 1. En effet, les fréquences approximatives devraient s'approcher des fréquences analytiques, du moins, pour un matériau homogène isotrope. Le cas 1 permet donc la validation des fréquences approximatives non seulement avec les fréquences expérimentales, mais également les fréquences analytiques.

ANNEXE IV. Isolation du nombre d'onde de Timoshenko

Tel que mentionné dans le chapitre 1, la fonction g_1 représente la relation entre a^* et b^* et f_1 représente l'équation fréquentielle qui est également fonction des deux nombres d'onde. Pour résoudre l'équation fréquentielle, la valeur de b^* doit être remplacée par la fonction u_1 qui est uniquement fonction de a^*. Lorsque $a^* < a_c^*$ la fonction g_1 est la suivante :

$$g_1(a,b) = \frac{(\gamma^2 b^2 + a^2)(a^2\gamma^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(1+\gamma^2)} - \frac{1}{k^2} = 0 \qquad \text{iv. 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\gamma^2 b^2 + a^2\right)\left(a^2\gamma^2 + b^2\right)}{\left(a^2 - b^2\right)(1+\gamma^2)} = \frac{1}{k^2} \qquad \text{iv. 2}$$

$$\Leftrightarrow k^2\gamma^2 b^4 + b^2\left(k^2 a^2(\gamma^4+1) + (1+\gamma^2)\right) + a^2\left(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)\right) = 0 \qquad \text{iv. 3}$$

Posons, $$A = k^2 a^2(\gamma^4+1) + (1+\gamma^2) > 0 \qquad \text{iv. 4}$$

A est donc un nombre positif. En réinjectant dans l'équation la relation suivante est obtenue :

$$k^2\gamma^2 b^4 + b^2 A + a^2\left(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)\right) = 0 \qquad \text{iv. 5}$$

En résolvant cette équation de deuxième de b^2 :

$$\Delta = A^2 - 4k^2\gamma^2 a^2(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)) \qquad \text{iv. 6}$$

$$b^2 = \frac{-A \pm \sqrt{\left(A^2 - 4k^2\gamma^2 a^2\left(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)\right)\right)}}{2k^2\gamma^2} \qquad \text{iv. 7}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{\left(A^2 - 4k^2\gamma^2 a^2\left(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)\right)\right)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 8}$$

Posons, $$B = 4k^2\gamma^2 a^2\left(k^2\gamma^2 a^2 - (1+\gamma^2)\right) \qquad \text{iv. 9}$$

En réinjectant dans l'expression de b la relation suivante est obtenue :

$$b = \pm\sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 10}$$

Dans la théorie de Timoshenko développée dans l'article de (Han et al., 1999), le nombre d'onde b est un réel positif. Les solutions suivantes sont donc rejetées :

$$b = -\sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 11}$$

Puisque dans ce cas le nombre d'onde est, soit un nombre imaginaire soit un nombre négatif. Pour que b soit réel et positif il faut que la condition suivante soit respectée :

$$-A \pm \sqrt{(A^2 - B)} > 0 \qquad \text{iv. 12}$$

De plus, pour que b soit réel il faut également que

$$A^2 - B > 0 \qquad \text{iv. 13}$$

L'expression ci-dessous est développée est manipulée :

$$\begin{aligned} & A^2 - 4k^2\gamma^2a^2\left(k^2\gamma^2a^2 - (1+\gamma^2)\right) \\ &= \left(k^2a^2(\gamma^4+1) + (1+\gamma^2)\right)^2 - 4k^2\gamma^2a^2\left(k^2\gamma^2a^2 - (1+\gamma^2)\right) \\ &= k^4a^4(\gamma^4+1)^2 + 2k^2a^2(\gamma^4+1)(1+\gamma^2) + (1+\gamma^2)^2 - \\ &\quad -4k^2\gamma^2a^2\left(k^2\gamma^2a^2 - (1+\gamma^2)\right) \\ &= k^4a^4[(\gamma^4+1)^2 - 4\gamma^4] + 2k^2a^2[(\gamma^4+1)(1+\gamma^2) + 2\gamma^2(1+\gamma^2)] + \\ &\quad +(1+\gamma^2)^2 \end{aligned} \qquad \text{iv. 14}$$

Le deuxième et le troisième terme de l'équation iv. 14 sont positifs. Il reste donc à vérifier si le premier terme l'est aussi :

$$k^4a^4[(\gamma^4+1)^2-4\gamma^4]>0 \qquad \text{iv. 15}$$

L'équation ci-dessus est positive si :

$$(\gamma^4+1)^2-4\gamma^4>0 \qquad \text{iv. 16}$$

En utilisant les propriétés de l'identité remarquable l'expression peut être modifiée d'Euler-Bernoulli :

$$(\gamma^4+1)^2-4\gamma^4=(\gamma^4-1)^2>0 \qquad \text{iv. 17}$$

Le premier terme est positif en tout temps et donc la condition iv. 13 est respectée. En revenant à l'équation iv. 10 il devient clair que la solution suivante doit être rejetée en tout temps :

$$b=\sqrt{\frac{-A-\sqrt{(A^2-B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 18}$$

Et la seule solution possible est la suivante :

$$b=\sqrt{\frac{-A+\sqrt{(A^2-B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 19}$$

Il faut donc prouver que la condition suivante est respectée :

$$-A+\sqrt{\left(A^2-4k^2\gamma^2a^2\left(k^2\gamma^2a^2-(1+\gamma^2)\right)\right)}>0 \qquad \text{iv. 20}$$

$$\Leftrightarrow -4k^2\gamma^2a^2\left(k^2\gamma^2a^2-(1+\gamma^2)\right)>0 \Leftrightarrow k^2\gamma^2a^2-(1+\gamma^2)<0$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2(k^2a^2-1)-1<0 \qquad \text{iv. 21}$$

La dernière relation ne peut être vérifiée qu'après avoir calculé les nombres d'onde.

Dans le cas où $a>a_c$:

$$\tilde{b}^2 = \frac{+A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{b} = \pm\sqrt{\frac{+A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 22}$$

De la même manière que iv. 18, les solutions suivantes sont rejetées :

$$\Leftrightarrow \tilde{b} = -\sqrt{\frac{+A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 23}$$

Puisque les relations iv. 4 et iv. 13 tiennent toujours, il est certain que :

$$+A + \sqrt{(A^2 - B)} > 0 \qquad \text{iv. 24}$$

Et donc,

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{+A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 25}$$

Il faut donc prouver que le dernier cas de figure n'est pas une solution puisqu'il peut n'y en avoir qu'une seule :

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{+A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2k^2\gamma^2}} \qquad \text{iv. 26}$$

Pour ce faire il faut prouver que :

$$A - \sqrt{(A^2 - B)} < 0 \qquad \text{iv. 27}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(A^2 - B)} > A \qquad \text{iv. 28}$$

Ceci mène à

$$\gamma^2(k^2a^2 - 1) - 1 < 0 \qquad \text{iv. 29}$$

Cette relation ne peut être vérifiée qu'après le calcul des nombres d'onde.

ANNEXE V. Manipulation des fonctions modales de Timoshenko

Cette annexe a pour objectif de comparer les expressions des fonctions modales classiques et manipulées de Timoshenko lorsque les nombres d'onde prennent des valeurs élevées, mais toujours dans le cas où $a < a_c$. Les notations ont été simplifiées pour une plus grande facilité de lecture par rapport au texte principal du Chapitre 3. Cette analyse permet de s'assurer que les expressions classiques et les expressions manipulées sont bel et bien équivalentes. Les expressions lorsque $a > a_c$ n'ont pas besoin d'être traitées, puisqu'elles ne sont pas sujettes aux mêmes types d'erreurs numériques.

V.1. Expressions classiques

Voici l'expression classique pour le déplacement transverse :

$$W^*(\xi) = \sin(a\,\xi) + C_2\cos(a\,\xi) + C_3\sinh(\beta\,\xi) + C_4\cosh(\beta\,\xi) \;\; avec\; \xi \in [0,1] \qquad \text{v. 1}$$

Avec,

$$C_2 = -\frac{(a^2+\gamma^2b^2)\left(2\sin(a)\,a + b\left(e^b - e^{-b}\right)\right)}{a\left(2\cos(a)\,(a^2+\gamma^2b^2) + (b^2+\gamma^2a^2)(e^b+e^{-b})\right)}$$

$$C_3 = -\frac{(a^2+\gamma^2b^2)b}{a(b^2+\gamma^2a^2)} \qquad \text{v. 2}$$

$$C_4 = \frac{(a^2+\gamma^2b^2)\left(2\sin(a)\,a + b\left(e^b - e^{-b}\right)\right)}{a\left(2\cos(a)\,(a^2+\gamma^2b^2) + (b^2+\gamma^2a^2)(e^b+e^{-b})\right)} = -C_2$$

Pour des nombres d'onde élevés les coefficients ci-dessus peuvent être simplifiés tel que suit :

$$C_2 = -\frac{(a^2+\gamma^2b^2)\left(2\,a\sin(a) + b\left(e^b - e^{-b}\right)\right)}{a\left(2\cos(a)\,(a^2+\gamma^2b^2) + (b^2+\gamma^2a^2)(e^b+e^{-b})\right)} =$$

$$= -\frac{(a^2+\gamma^2b^2)\left(2\,a\sin(a)\,e^{-b} + b\left(1 - e^{-2b}\right)\right)}{a\left(2\cos(a)\,(a^2+\gamma^2b^2)e^{-b} + (b^2+\gamma^2a^2)(1+e^{-2b})\right)} \qquad \text{v. 3}$$

$$\xrightarrow{a,b\gg 1} -\frac{(a^2+\gamma^2\,b^2)b}{a(b^2+\gamma^2a^2)}$$

$$C_3 = -\frac{(a^2+\gamma^2 b^2)b}{a(b^2+\gamma^2 a^2)} \xrightarrow{a,b\gg 1} -\frac{(a^2+\gamma^2 b^2)\,b}{a\,(b^2+\gamma^2 a^2)}$$

$$C_4 = \frac{(a^2+\gamma^2 b^2)\left(2\,a\,\sin(a)+b\left(e^b-e^{-b}\right)\right)}{a\left(2\cos(a)\,(a^2+\gamma^2 b^2)+(b^2+\gamma^2 a^2)\,(e^b+e^{-b})\right)} = \xrightarrow{a,b\gg 1} \frac{(a^2+\gamma^2\,b^2)\,b}{a\,(b^2+\gamma^2\,a^2)}$$

Et donc, $W^*(\xi) = \sin(a\,\xi) + C_2\cos(a\,\xi) + C_3\sinh(\beta\,\xi) + C_4\cosh(\beta\,\xi)$

$$\xrightarrow{a,b\gg 1} \sin(a\,\xi) - \frac{(a^2+\gamma^2\,b^2)b}{a(b^2+\gamma^2 a^2)}\cos(a\,\xi) - \frac{(a^2+\gamma^2 b^2)b}{a(b^2+\gamma^2 a^2)}\sinh(\beta\,\xi) + \frac{(a^2+\gamma^2\,b^2)\,b}{a\,(b^2+\gamma^2\,a^2)}\cosh(\beta\,\xi) \qquad \text{v. 4}$$

Les erreurs numériques apparaissent lorsque $\xi \approx 1$ et que les nombres d'onde possèdent des valeurs élevées de manière à ce que l'argument $b * \xi$ soit élevé. Dans ce cas les sinus et cosinus hyperboliques sont presque égaux :

$$\sinh(\beta\,\xi) - \cosh(\beta\,\xi) \approx 0 \Leftrightarrow \sinh(\beta\,\xi) \approx \cosh(\beta\,\xi)\ \textit{pour}\ b \gg 1\ \textit{et}\ \xi \approx 1 \qquad \text{v. 5}$$

C'est à cet endroit que les erreurs numériques se produisent. En effet, les termes égaux ne le sont pas tout à fait. Cependant, lorsqu'une précision limitée est disponible le logiciel la simplification ci-dessus va être effectuée. Une analyse plus poussée, n'ayant pas encore été effectuée, devrait vérifier les valeurs que prennent les termes hyperboliques multipliés par leurs coefficients pour chaque nombre d'onde afin de mieux comprendre la source des erreurs numériques.

Après simplification l'expression suivante est obtenue :

$$W^*(1) \approx \sin(a) - \frac{(a^2+\gamma^2\,b^2)b}{a(b^2+\gamma^2 a^2)}\cos(a) \qquad \text{v. 6}$$

Voici l'expression classique pour l'angle de flexion :

$$PSI_i^*(\xi) = D_1\sin(a\,\xi) + D_2\cos(a\,\xi) + D_3\sinh(\beta\,\xi) + D_4\cosh(\beta\,\xi) \qquad \text{v. 7}$$

Avec,

$$D_1 = -\frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)a} C_2$$

$$\xrightarrow{a,b\gg1} \left(-\frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)a}\right)\left(-\frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)b}{a(b^2 + \gamma^2 * a^2)}\right) = \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)^2 b}{a^2\,(1+\gamma^2)\,(b^2 + \gamma^2 a^2)}$$

$$D_2 = \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)\,a} \xrightarrow{a,b\gg1} \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)\,a}$$

$$D_3 = \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1+\gamma^2)\,b} C_4$$

$$\xrightarrow{a,b\gg1} \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1+\gamma^2)\,b} * \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)\,b}{a\,(b^2 + \gamma^2 a^2)} = \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1+\gamma^2)}$$

$$D_4 = \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1+\gamma^2\,)\,b} C_3$$

$$\xrightarrow{a,b\gg1} \frac{b^2 + \gamma^2 a^2}{(1+\gamma^2)\,b} * \left(-\frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)\,b}{a\,(b^2 + \gamma^2 a^2)}\right) = -\frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1+\gamma^2)}$$

Et donc lorsque $a, b \gg 1$ et $\xi = 1$,

$$PSI_i^*(1) = D_1 \sin(a) + D_2 \cos(a) + D_3 \sinh(\beta) + D_4 \cosh(\beta)$$

$$\xrightarrow{a,b\gg1} \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)^2 b}{a^2\,(1+\gamma^2)\,(b^2 + \gamma^2 a^2)} \sin(a) + \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)\,a} \cos(a)$$

$$- \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1+\gamma^2)} \sinh(\beta) + \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1+\gamma^2)} \cosh(\beta) \approx \qquad \text{v. 8}$$

$$\approx \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)^2 b}{a^2\,(1+\gamma^2)\,(b^2 + \gamma^2 a^2)} \sin(a) + \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1+\gamma^2)\,a} \cos(a)$$

V.2. Expressions manipulées

Voici l'expression manipulée de la fonction modale de déplacement transverse

$$W^*(\xi) = \sin(a\,\xi) + C_2 \cos(a\,\xi) + B \sinh(\beta\,\xi) + C_4 e^{-\beta\,\xi} \qquad \text{v. 9}$$

Où C_2 et C_4 possèdent les mêmes expressions que pour les fonctions modales classiques et B vaut :

$$B = C_3 + C_4 \xrightarrow{a,b \gg 1} -\frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)\, b}{a\,(b^2 + \gamma^2 a^2)} + \frac{(a^2 + \gamma^2\, b^2)\, b}{a\,(b^2 + \gamma^2\, a^2)} = 0 \qquad \text{v. 10}$$

Et donc lorsque $\xi = 1$ et $b \gg 1$

$$W^*(1) = \sin(a) + C_2 \cos(a) + B \sinh(\beta) + C_4 e^{-\beta} \approx$$
$$\approx \sin(a) - \frac{(a^2 + \gamma^2\, b^2) b}{a(b^2 + \gamma^2 a^2)} \cos(a) \qquad \text{v. 11}$$

On retrouve la même expression que v. 6. Dans cette expression, plus aucune soustraction de grands nombres presque égaux n'apparait. En effet, l'exponentielle négative tend vers 0 et bien que le sinus hyperbolique tend vers l'infini, son coefficient B tend vers 0. La limite de cette multiplication étant indéfinie, la valeur limite ne peut être calculée. Cependant il est suspecté que les valeurs de cette multiplication restent contenues dans une gamme de valeurs qui n'est pas trop grande. Ceci n'a pas été vérifié.

Voici l'expression manipulée de la fonction modale d'angle de flexion :

$$PSI^*(\xi) = D_1 \sin(a\,\xi) + D_2 \cos(a\,\xi) + F \sinh(\beta\,\xi) + D_4 e^{-\beta\,\xi} \qquad \text{v. 12}$$

Où D_1, D_2 et D_4 sont les mêmes que dans le cas des expressions classiques et F vaut :

$$F = D_3 + D_4 \xrightarrow{a,b \gg 1} \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1 + \gamma^2)} - \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)}{a\,(1 + \gamma^2)} = 0 \qquad \text{v. 13}$$

Donc pour $\xi = 1$ et $a, b \gg 1$ les expressions sont simplifiées tel que suit :

$$PSI^*(1) \approx D_1 \sin(a) + D_2 \cos(a)$$
$$= \frac{(a^2 + \gamma^2 b^2)^2 b}{a^2\,(1 + \gamma^2)\,(b^2 + \gamma^2 a^2)} \sin(a) + \frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{(1 + \gamma^2)\, a} \cos(a) \qquad \text{v. 14}$$

On retrouve la même expression que v. 8.

ANNEXE VI. Validation des résultats théoriques

Deux approches complémentaires ont été choisies pour valider le bon fonctionnement du code. La première approche est celle de la validation théorique avec les résultats de la littérature et la deuxième approche a été la validation des résultats théoriques avec des résultats expérimentaux.

VI.1. Validation avec résultats de la littérature

Seules les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont utilisées dans les codes écrits dans le cadre de cette recherche. La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli néglige le cisaillement transversal et l'inertie de rotation, tandis que la théorie de Timoshenko les prend en compte et est donc plus précise. Les équations utilisées dans le code sont tirées de (Han et al., 1999), ainsi que de (Gonçalves et al., 2007).

Les deux théories sont validées en deux parties. La première consiste à comparer les fréquences propres calculées de certaines poutres avec les fréquences propres données dans la littérature. La deuxième de vérifier que les fonctions modales qui en découlent sont orthogonales.

VI.1.1. Comparaison des fréquences propres avec la littérature

Les calculs sont comparés avec les résultats donnés dans littérature dans les articles de (Han et al., 1999) et (Majkut, 2009).

Voici les caractéristiques de la poutre tubulaire que (Han et al., 1999) utilisent dans leurs calculs :

Tableau vi. 1: Caractéristiques de la poutre de (Han et al., 1999)

Caractéristiques de la poutre de (Han et al., 1999)							
E	$200\ GPa$	ν	0.29	A	$0.0097389\ m^2$	L	$1\ m$
G	$77.5\ GPa$	ρ	$7830\ \frac{kg}{m^3}$	I	$0.0001171\ m^4$	s	9.1192
k'	0.53066	γ	2.205				

Ainsi que les caractéristiques des deux poutres rectangulaires que (Majkut, 2009) utilise dans les siens :

Tableau vi. 2 : Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009)

Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009)					
E	$210\ GPa$	$b\ (largeur)$	$0.02\ m$	ρ	$7860\frac{kg}{m^3}$
G	$81\ GPa$	$h\ (hauteur)$	$0.03\ m$		

Tableau vi. 3: Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009)

Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009)					
E	$210\ GPa$	$b\ (largeur)$	$0.02\ m$	ρ	$7860\frac{kg}{m^3}$
G	$81\ GPa$	$h\ (hauteur)$	$0.08\ m$		

Ces informations ne sont malheureusement pas suffisantes pour mener les calculs avec les théories d'Euler-Bernoulli et Timoshenko. Les paramètres adimensionnels sont calculés grâces aux équations qui suivent pour obtenir les tableaux complétés avec les paramètres nécessaires. Sachant qu'il s'agit d'une poutre homogène isotrope avec une section rectangulaire :

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)} \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{2} * \left(-2 + \frac{E}{G}\right) \qquad A = b * h$$

$$I = \frac{b * h^3}{12}$$

$$k' = 10 * \frac{1 + \nu}{12 + 11 * \nu} \qquad \text{vi. 1}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{k' * G}} \qquad s = L * \sqrt{\frac{A}{I}}$$

Où l'expression du facteur de forme est celle pour une poutre à section pleine rectangulaire (Han et al., 1999).

Tableau vi. 4 : Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009)

Caractéristiques de la poutre mince de (Majkut, 2009)							
E	$210\ GPa$	ν	0.2963	A	$0.0006\ m^2$	L	$1\ m$
G	$81\ GPa$	ρ	$7860\frac{kg}{m^3}$	I	$4.50 * 10^{-8}\ m^4$	s	115.47
k'	0.8492429230	γ	1.747				

Tableau vi. 5 : Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009)

Caractéristiques de la poutre épaisse de (Majkut, 2009)							
E	$210\ GPa$	ν	0.2963	A	$0.0016\ m^2$	L	$1\ m$
G	$81\ GPa$	ρ	$7860\frac{kg}{m^3}$	I	$8.53 * 10^{-7}\ m^4$	s	43.3013
k'	0.8492429230	γ	1.747				

Voici la comparaison des résultats :

Tableau vi. 6 : Comparaison des résultats pour la poutre de (Han et al., 1999)

Comparaison des résultats pour la poutre de (Han et al., 1999)						
	Euler-Bernoulli			Timoshenko		
Fréquence propre	Code	(Han et al., 1999)	Erreur	Code	(Han et al., 1999)	Erreur
1	1948.54	1948.62	0.004%	1696.07	1696.03	-0.002%
2	12211.26	12211.8	0.004%	6768.68	6768.24	-0.007%
3	34191.89	34193.39	0.004%	14268.41	14267.26	-0.008%
4	67002.47	67005.41	0.004%	20417.32	20415.37	-0.010%
5	110759.88	110764.74	0.004%	25152.65	25150.52	-0.008%
6	165456.08	165463.34	0.004%	29214.45	29211.86	-0.009%
7	231091.55	231101.69	0.004%	33794.46	33792.23	-0.007%
8	307666.27	307679.76	0.004%	38006.99	38003.37	-0.010%
9				44961.91	44958.47	-0.008%
10				46404.72	46401.78	-0.006%
11				53188.46	53183.33	-0.010%
12				58853.36	58849.04	-0.007%

Tableau vi. 7 : Comparaison des résultats pour la poutre mince de (Majkut, 2009)

Comparaison des résultats pour la poutre mince de (Majkut, 2009)						
	Euler-Bernoulli			Timoshenko		
Fréquence propre	Résultats code	(Majkut, 2009)	Erreur	Résultats code	(Majkut, 2009)	Erreur
1	157.39	153.6	-2.408%	157.28	157.6	0.203%
2	986.35	962.6	-2.408%	981.53	987.7	0.629%
3	2761.81	2695.3	-2.408%	2730.01	2752.5	0.824%
4	5412.05	5281.6	-2.410%	5298.81	5344.2	0.857%
5	8946.51	8730.9	-2.410%	8654.14	8716.1	0.716%

Tableau vi. 8 : Comparaison des résultats pour la poutre épaisse de (Majkut, 2009)

Comparaison des résultats pour la poutre épaisse de (Majkut, 2009)						
	Euler-Bernoulli			Timoshenko		
Fréquence propre	Résultats code	(Majkut, 2009)	Erreur	Résultats code	(Majkut, 2009)	Erreur
1	419.71	419.6	-0.026%	417.62	424.1	1.552%
2	2630.27	2666.8	1.389%	2542.96	2653.7	4.355%
3	7364.84	7387.3	0.305%	6825.48	7145.3	4.686%
4	14432.15	14284	-1.027%	12661.6	13016	2.799%
5	23857.37	23383	-1.988%	19681.36	19645	-0.185%

Les résultats du code informatique pour les théories analytiques pour les poutres homogènes isotropes se rapprochent fort des résultats donnés dans la littérature.

VI.1.2. Orthogonalité des fonctions modales

Il a déjà été mentionné dans le Chapitre 2 que les fonctions modales doivent nécessairement être orthogonales entre elles. Malheureusement, les fonctions modales sont sujettes à des erreurs numériques. Comme le décrivent (Gonçalves et al., 2007) dans leur article scientifique, les erreurs numériques apparaissent relativement tôt et plus précisément à partir du dixième mode, dans les fonctions modales d'Euler-Bernoulli. La première manière de voir s'il y a des erreurs numériques est de tracer les fonctions modales sur un graphique afin de vérifier s'il y a des comportements étranges, mais ce n'est pas toujours évident si l'on n'est pas habitué à analyser des fonctions modales. La deuxième manière, quantifiable, est de calculer les erreurs numériques grâce à la relation d'orthogonalité des fonctions modales. Pour Euler-Bernoulli l'erreur numérique est donnée par la relation suivante :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}}.M\left(\boldsymbol{W_j^*}\right)d\xi - \delta_{ij} = Erreur_{i,j} \qquad \text{vi. 2}$$

Avec,

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(x^*)\,] \qquad \text{vi. 3}$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \rho^* A^* * \boldsymbol{W_i^*}$$

Tandis que pour Timoshenko on l'erreur est donnée par la relation suivante :

$$\int_0^1 (\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}}.M\left(\boldsymbol{W_j^*}\right)d\xi - \delta_{ij} = Erreur_{i,j} \qquad \text{vi. 4}$$

Avec,

$$(\boldsymbol{W_i^*})^{\boldsymbol{T}} = [W_i^*(\xi) \quad PSI_i^*(\xi)] \qquad \text{vi. 5}$$

$$M(\boldsymbol{W_i^*}) = \begin{bmatrix} \rho^* A^* & 0 \\ 0 & \rho^* I^* \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} W_i^*(\xi) \\ PSI_i^*(\xi) \end{bmatrix}$$

La matrice $Erreur$ contient tous les calculs d'erreurs. Dans cette étude on ne regardera que le maximum de cette matrice, c'est à dire la plus grande erreur. L'exemple numérique proposé pour illustrer les erreurs maximales pour les expressions des fonctions modales d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko est le même. Les calculs sont réalisés avec 10 décimales derrière la virgule flottante, 20 modes et avec la poutre de l'exemple de (Han et al., 1999).

Le calcul avec 20 modes donne une matrice d'erreur de dimensions 20x20. L'erreur maximale obtenue dans le cas des expressions classiques pour les deux théories de poutres est de l'ordre de l'unité. Ceci est un très mauvais résultat, puisque la relation d'orthogonalité mentionnée donne l'unité comme résultat lorsque $i = j$.

Cependant, lorsqu'on lance le calcul avec les mêmes paramètres mais avec les expressions manipulées, on obtient une erreur maximale de l'ordre de 10^{-10} pour les deux théories de poutres. Les fonctions modales sont donc vraiment orthogonales.

Le bon fonctionnement du code est donc validé.

VI.2. Validation de la méthode des modes assumés

Cette annexe a deux objectifs. Le premier, de valider la méthode des modes assumés sur des poutres homogènes et isotropes. Cette validation se fait en deux parties. Il faut prouver que les fréquences propres analytiques et approximatives pour une poutre homogène et isotrope sont égales et que la séparation de cette poutre en plusieurs couches n'a pas d'influence sur le résultat final. La deuxième partie du premier objectif est présentée en fin d'annexe.

Le deuxième objectif est de comparer les fréquences propres obtenues théoriquement et expérimentalement.

La logique de validation est très simple. La méthode des modes assumés est une méthode approximative et son utilité apparaît lors du calcul des résultats pour des problèmes difficiles ou même impossibles à résoudre analytiquement. Des exemples de tels problèmes, sont les poutres à plusieurs couches, les poutres avec des masses ponctuelles décentrées provocant de la torsion etc. Lorsqu'un problème compliqué est résolu avec la méthode des modes assumés, les fréquences propres calculées sont différentes de celles obtenues pour le problème homogénéisé. Ce dernier peut être résolu avec grande précision grâce aux théories des poutres. Cependant, pour des problèmes simples, tels que des poutres homogènes, isotropes et à section constante, qui sont résolvables analytiquement, la méthode des modes assumés devrait produire des résultats en accord avec le modèle analytique, c'est-à-dire avec des fréquences propres identiques. En effet, le problème homogénéisé d'une poutre homogène isotrope à section constante demeure le même problème. Cette propriété est l'essence de la méthode de validation de la méthode des modes assumés et est adoptée dans le cadre de ce travail.

Le bon fonctionnement de la méthode des modes assumés est vérifié sur 3 poutres qui ont été trouvées dans le département de génie mécanique. Deux d'entre elles sont en aluminium et l'une en acier. Ces trois poutres sont présentées en fonction d'un coefficient d'élancement décroissant, c'est-à-dire, en faisant donc le passage de la théorie d'Euler-Bernoulli à celle de Timoshenko. De plus, il est raisonnable de faire l'hypothèse qu'aucune de ces poutres ne possèdent des surfaces parfaitement planes. Le contact entre les plaques d'encastrement n'est donc jamais parfait.

VI.2.1. Caractéristiques des poutres

VI.2.1.1. Poutre 1

Cette poutre est fabriquée en aluminium 2014 T4 dont les propriétés sont résumées dans le tableau ci-dessous (“ASM Material Data Sheet,” n.d.).

Tableau vi. 9: Propriétés de l’aluminium 2024 T4

Propriétés de l’aluminium 2024 T4			
ρ	$2780\,\frac{kg}{m^3}$	G	$28\ GPa$
E	$73.1\ GPa$	v	0.33

Tableau vi. 10 : Propriétés spécifiques à la poutre 1

Propriétés spécifiques à la poutre 1			
k'	0.850927	γ^*	1.751593

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont les suivantes :

Tableau vi. 11 : Caractéristiques géométriques de la poutre 1 [m]

Caractéristiques géométriques de la poutre 1 [m]			
L	0.406	w	0.0254
h	0.003175	s^*	442.96

La figure qui suit illustre la forme géométrique de la poutre 1 :

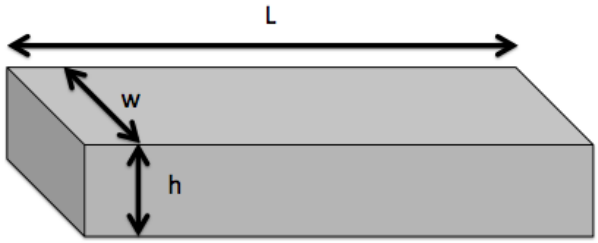


Figure vi- 1: Géométrie de la poutre 1

Étant donné que le coefficient d'élancement s est plus élevé que 100, la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est suffisante (Han et al., 1999).

VI.2.1.2. Poutre 2

La quatrième poutre est en acier, mais le type d'acier n'est pas connu avec exactitude. L'hypothèse est faite qu'il s'agit d'acier 1018. Il s'agit à nouveau d'une poutre creuse mais la section n'est pas parfaitement rectangulaire.

Tableau vi. 12 : Propriétés de l'acier 1018

Propriétés de l'acier 1018			
ρ	$7870\,\frac{kg}{m^3}$	G	$80\ GPa$
E	$205\ GPa$	v	0.29

Tableau vi. 13 : Propriétés spécifiques à la poutre 2

Propriétés spécifiques à la poutre 2			
k'	0.435	γ^*	2.42709

Voici les caractéristiques géométriques :

Tableau vi. 14 : Caractéristiques géométriques de la poutre 2 [m]

Caractéristiques géométriques de la poutre 2 [m]			
L	0.65	h	0.0254
w	0.0254	e	0.0031
r	0.0031	s^*	69.36

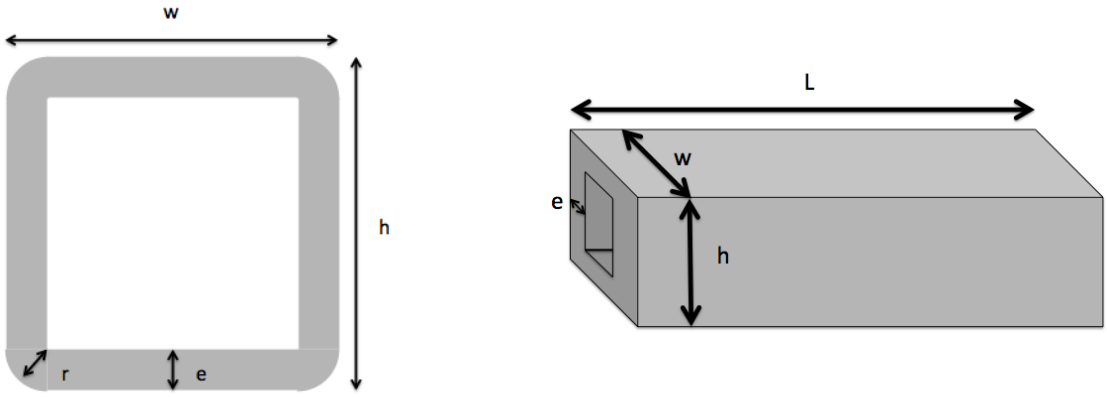


Figure vi- 2 : Géométrie de la poutre 2

Dans le code de calcul la section n'est pas modélisée avec des coins arrondis, mais plutôt avec une section rectangulaire.

VI.2.1.3. Poutre 3

Cette poutre est fabriquée en aluminium, mais le type d'alliage n'a pas été déterminé avec précision. L'hypothèse a été faite qu'il s'agit également d'aluminium 2024 T4 tel que la poutre 1.

Tableau vi. 15 : Propriétés spécifiques à la poutre 3

Propriétés spécifiques à la poutre 3			
$\boldsymbol{k'}$	0.43699	γ^*	2.44422

Les caractéristiques géométriques de cette poutre sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Tableau vi. 16 : Caractéristiques géométriques de la poutre 3 [m]

Caractéristiques géométriques de la poutre 3 [m]			
L	0.534	h	0.038
w	0.038	e	0.003
s^*	37.23		

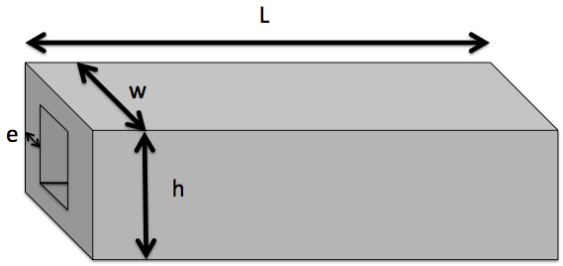


Figure vi- 3 : Géométrie de la poutre 3

Cependant cette poutre est percée à quelques endroits et cela influence les mesures expérimentales.

Figure vi- 4 : Alésages de la poutre 3

Les deux images ci-dessous illustrent les endroits où la poutre est percée. Celle-ci a été placée sur le banc d'essai avec les faces trouées en contact avec les plaques de serrage.

VI.2.2. Fréquences propres calculées

Il faut préciser que théoriquement il ne devrait pas être nécessaire de valider la méthode pour des sections creuses si la méthode est validée pour des sections pleines, mais en pratique l'algorithme

qui calcule les énergies potentielles et cinétiques pour une poutre creuse est légèrement différent que l'algorithme utilisé pour les sections pleines. De plus, contrairement aux poutres en composites fabriquées, les poutres homogènes et isotropes mentionnées ne sont pas pleines à leur encastrement. Cela a possiblement une influence sur les fréquences propres. Les poutres sont simulées en utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et Timoshenko et les fréquences propres obtenues sont comparées entre elles ainsi qu'avec les fréquences propres expérimentales grâce au banc d'essais. De plus, les fonctions modales W sont comparées entre elles et dans le cas de la théorie des poutres de Timoshenko le cisaillement est évalué. Il est possible de calculer les fonctions modales de cisaillement en soustrayant les fonctions modales d'angle de flexion de la dérivée des fonctions modales de déplacement transverse :

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x} W - PSI$$

VI.2.2.1. Poutre 1

Le tableau ci-dessous résume les fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales obtenues pour la poutre 1 :

Tableau vi. 17 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 1

Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 1[Hz]						
	Euler-Bernoulli		Timoshenko		Expérimental	Différence avec Timoshenko analytique
	Analytique	Approximatif	Analytique	Approximatif		
f_1	15.96	15.96	15.95	15.95	16	-0.31%
f_2	99.99	99.99	99.96	99.96	98	-1.96%
f_3	279.98	279.98	279.75	279.75	275	-1.70%
f_4	548.64	548.64	547.83	547.83	538	-1.79%

Les fréquences expérimentales sont extraites de la figure expérimentale ci-dessous représentant le spectre fréquentiel de la poutre suite à un impact. Pour la poutre sollicitée en flexion, les pics les

plus prononcés devraient être ceux des vibrations transverses. Cependant cela dépend de la manière dont la poutre est impactée. Il faut donc considérer non-seulement la taille des pics, mais aussi la proximité des pics par rapport aux valeurs théoriques calculées.

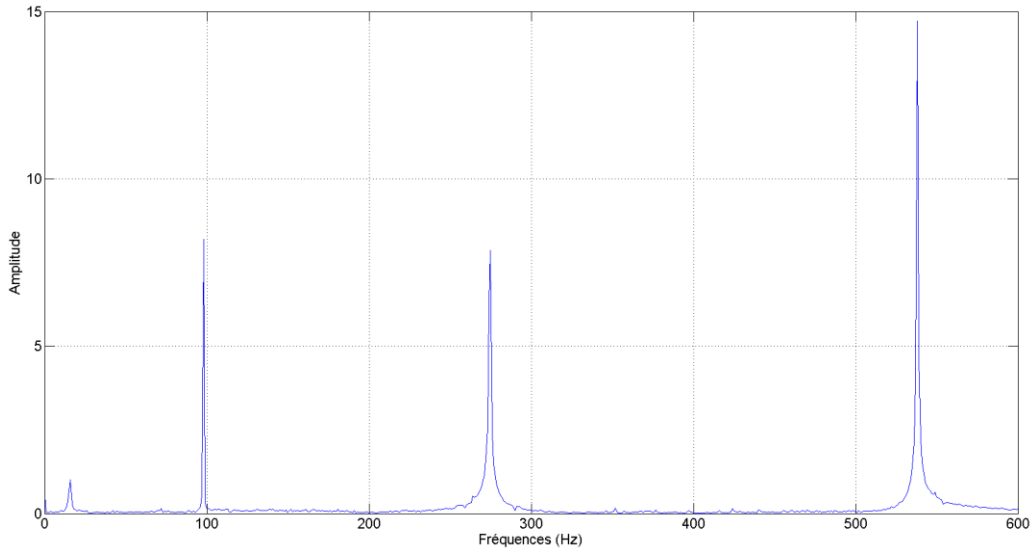


Figure vi- 5:Fréquences propres expérimentales de la poutre 1

On remarque premièrement que les fréquences analytiques et approximatives sont en accord pour chacune des deux théories de poutres. Le cisaillement est donc négligeable. Deuxièmement, les fréquences de Timoshenko sont légèrement plus faibles par rapport à celles d'Euler-Bernoulli. Ceci est en accord avec la littérature (Han et al., 1999).

Les fréquences expérimentales sont relativement proches des fréquences théoriques, avec un écart d'environ 1.8% par rapport aux fréquences analytiques de Timoshenko. Ce léger écart pourrait être causé par plusieurs choses. En effet, il se peut qu'il existe une différence entre les données de la poutre et les données fournies au logiciel. Il se pourrait aussi que l'encastrement du banc d'essais ne soit pas en mesure de simuler un encastrement parfait puisque seul deux côtés de la poutre testée sont en contact avec les plaques de serrage du banc d'essais. Un encastrement non-parfait serait modélisé par un appui simple avec un ressort torsionnel possédant une grande rigidité. Cette condition limite imparfaite résulte à des fréquences propres plus faibles se rapprochant un peu plus des fréquences propres obtenues avec une condition aux limites simplement supportée. Finalement, il se peut qu'un éventuel couplage des vibrations transverses avec les vibrations en torsions et longitudinales abaisse les fréquences propres expérimentales par

rapport aux fréquences propres des deux théories de poutres étudiées. Théoriquement, pour une poutre homogène, isotrope à section constante et possédant deux axes de symétrie aucun couplage n'est possible, mais en réalité la section n'est jamais parfaitement symétrique, induisant des couplages vibratoires.

Pour une poutre dont le cisaillement peut être négligé, tel que la poutre 1, les fonctions modales de déplacement transverse devraient être semblables pour les deux théories de poutres. Voici les quatre fonctions modales de déplacement transverse pour les deux théories de poutres.

Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

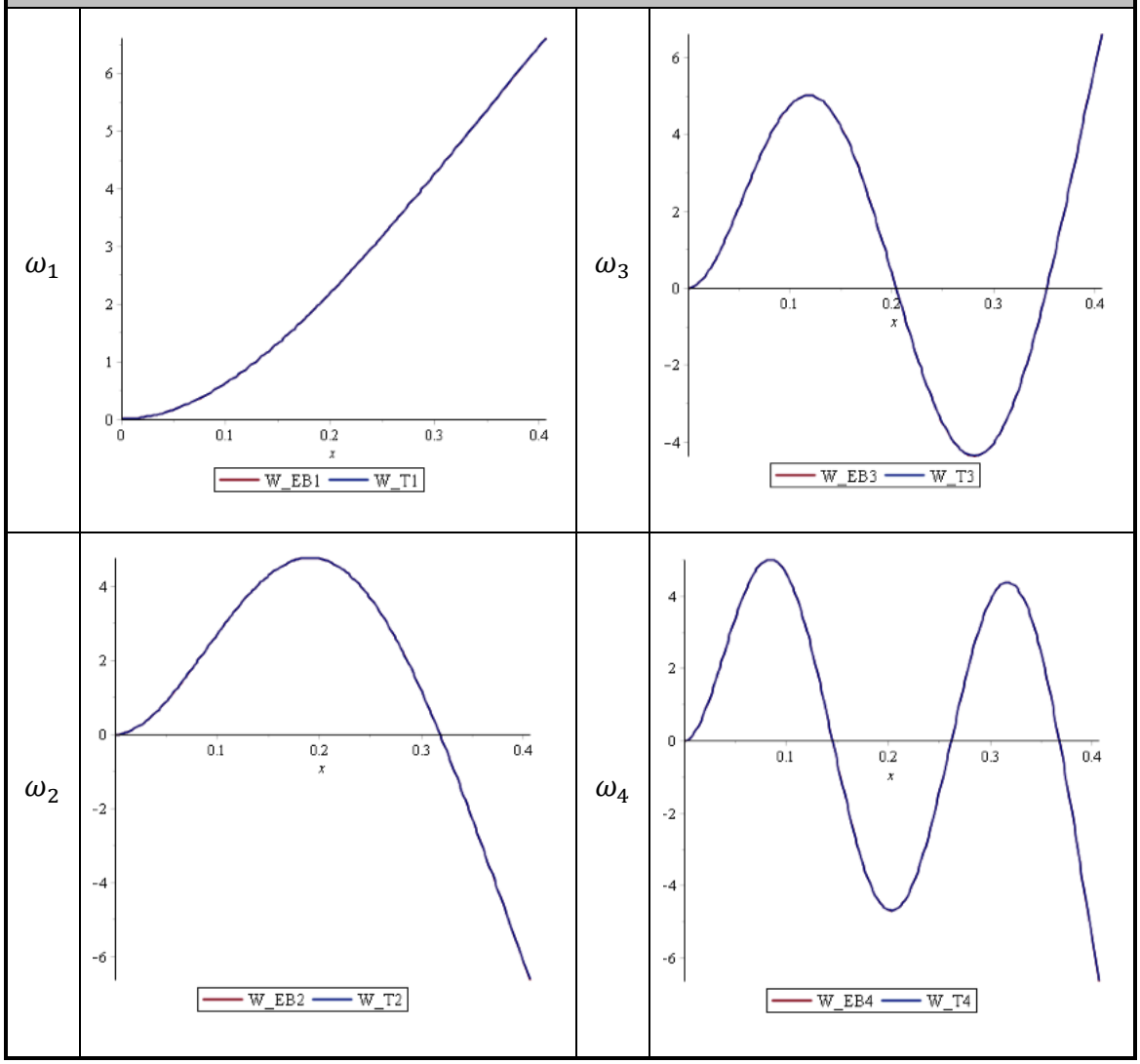
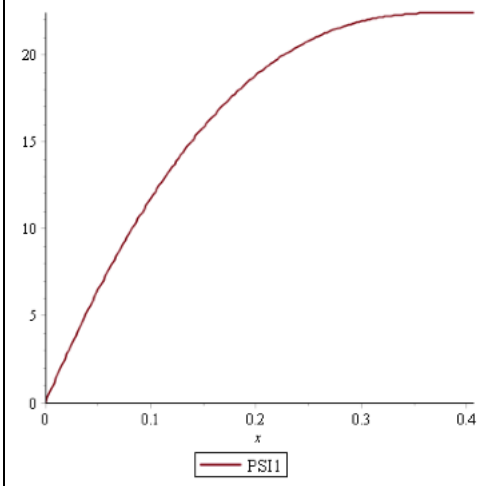


Figure vi- 6 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

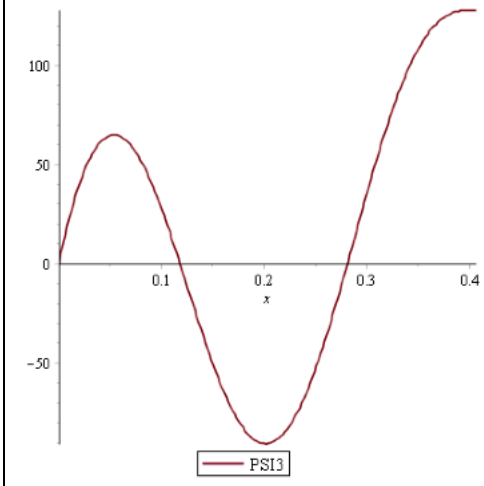
Il est clair qu'il n'y a presque aucune différence entre les fonctions modales de déplacement transverse entre les deux théories de poutres. Les fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko sont les suivantes :

Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko

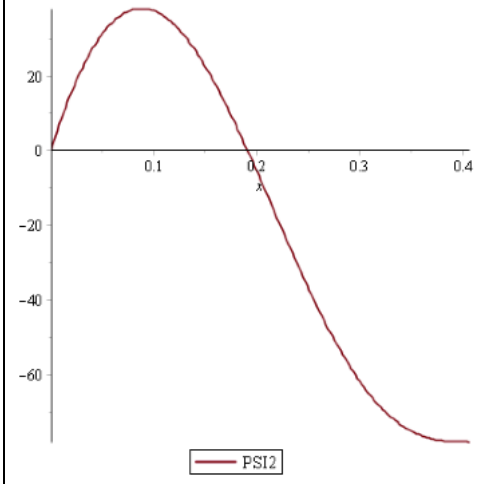
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

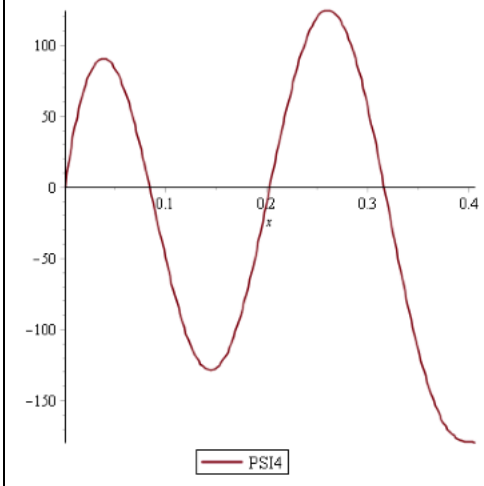


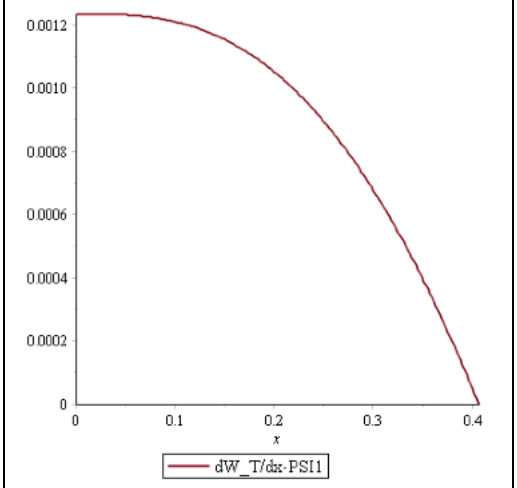
Figure vi- 7 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de flexion

L'amplitude des fonctions modales d'angle de flexion est croissante avec le numéro de mode. Dans le cas d'une poutre mince, pour que le cisaillement soit négligeable il faut que la dérivée des fonctions modales W possède la même forme et qu'elle soit presque égale aux fonctions modales PSI.

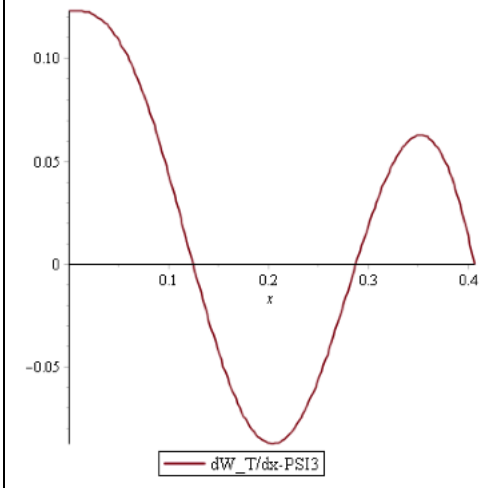
Les figures ci-dessous représentent les fonctions modales de cisaillement de la poutre grâce à Timoshenko.

Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

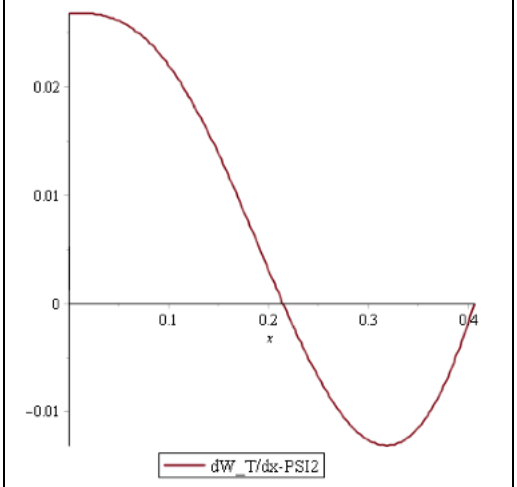
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

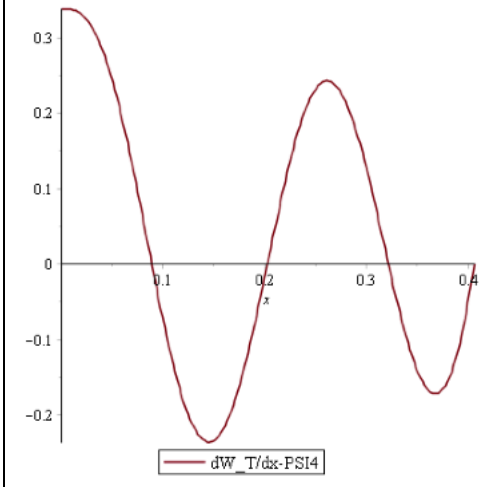


Figure vi- 8 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

Les figures montrent que le cisaillement est toujours nul à l'extrémité libre et que l'amplitude des modes de cisaillement croît avec le numéro de mode, tout comme les fonctions modales PSI.

La méthode des modes assumés semble bien fonctionner pour des poutres pleines homogènes et isotropes.

VI.2.2.2. Poutre 2

Le tableau ci-dessous résume les fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales obtenues pour la poutre 2 :

Tableau vi. 18 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 2

Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 2 [Hz]						
	Euler-Bernoulli		Timoshenko		Expérimental	Différence avec Timoshenko analytique
	Analytique	Approximatif	Analytique	Approximatif		
f_1	64.33	64.33	64.12	64.12	58	-9.54%
f_2	403.17	403.17	394.13	394.13	363	-7.90%
f_3	1128.88	1128.88	1071.57	1071.57	1008	-5.93%
f_4	2212.16	2212.16	2018.13	2018.13	1931	-4.32%

Les fréquences expérimentales sont extraites à partir de la figure ci-dessous représentant le spectre fréquentiel de la poutre suite à un impact. Les fréquences expérimentales ont été choisies avec les mêmes critères que pour la poutre 1.

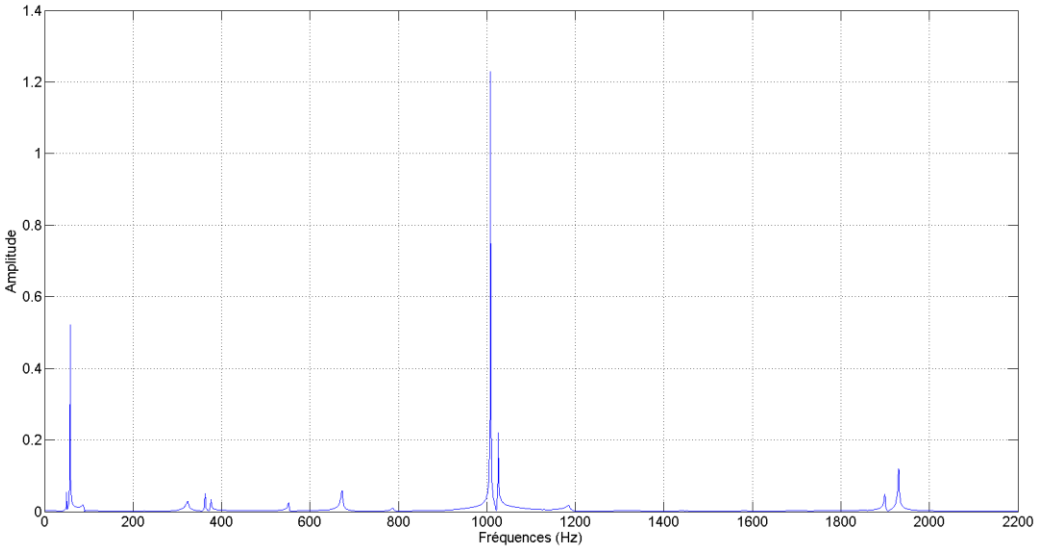


Figure vi- 9 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 2

On remarque premièrement que les fréquences analytiques et approximatives sont en accord pour chacune des deux théories de poutres. Deuxièmement, les fréquences de Timoshenko sont d'environs 10% plus faibles par rapport à celles d'Euler-Bernoulli. Ceci est normal puisque le coefficient d'élancement est plus faible que 100 et donc les effets du cisaillement apparaissent.

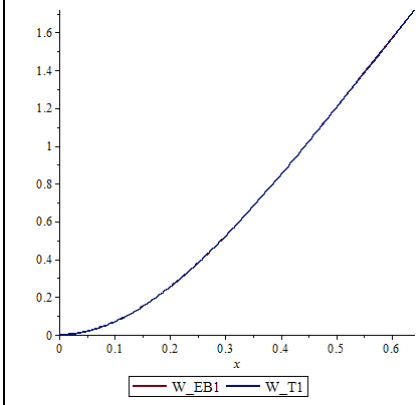
Bien que les différences entre les mesures expérimentales et théoriques soient acceptables, il est étonnant que les différences soient de l'ordre de 6%. En effet, il s'agit toujours d'une poutre homogène et isotrope. Bien que la cause de ces différences peut être une combinaison des mêmes facteurs d'incertitude que dans le cas de la poutre 1, la modélisation de la section de la poutre en une section rectangulaire, ajoute de la masse et donc de l'inertie dans le modèle. Ceci devrait avoir comme effet d'abaisser les fréquences propres théoriques par rapport aux fréquences propres expérimentales. Cependant, les valeurs théoriques sont plus élevées que les valeurs expérimentales. Ceci signifie qu'un des facteurs provoquant des erreurs sur les mesures expérimentales possède une grande influence dans le cas des sections creuses. Des erreurs de 6% ne peuvent, à priori, pas être causées par des légères incertitudes sur la section de la poutre ou sur le positionnement de la poutre sur le banc d'essais. La majeure différence entre la poutre 1 et la poutre 2 est le passage d'une section pleine à une section creuse. De plus, cette section n'est pas pleine à l'encastrement et ceci est une hypothèse de base dans les théories des poutres. Les

erreurs sur les fréquences propres expérimentales sont donc attribuées à des poutres qui ne sont pas pleines à l'encastrement.

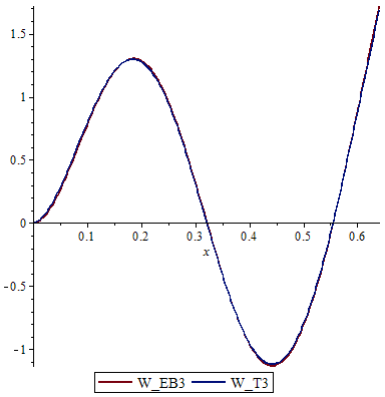
Pour une poutre dont le cisaillement ne peut être négligé, tel que la poutre 2, les fonctions modales de déplacement transverse devraient être différentes entre les deux théories de poutres. Voici les quatre fonctions modales de déplacement transverse pour les deux théories de poutres.

Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

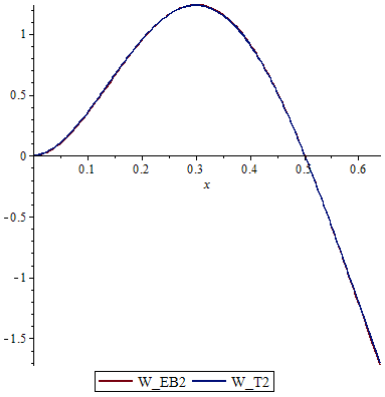
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

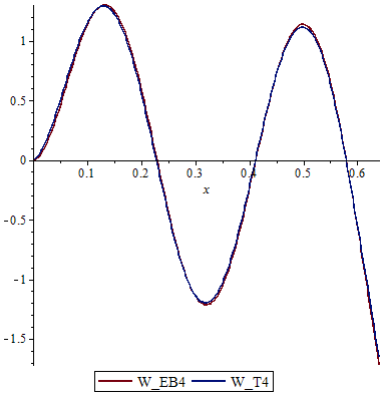


Figure vi- 10 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

Les fonctions modales ci-dessus se ressemblent mais ne sont pas tout à fait égales. En effet, l'écart entre les fonctions modales W d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko est plus grand que dans le cas de la poutre 1. Afin d'illustrer cette différence encore plus les fonctions modales pour le dixième mode sont illustrées ci-dessous :

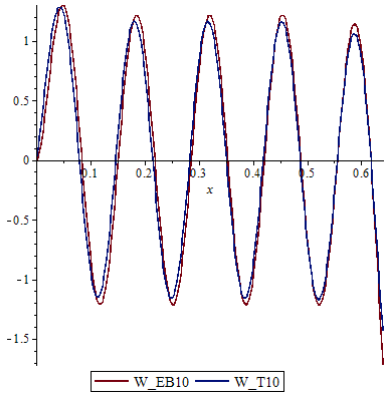
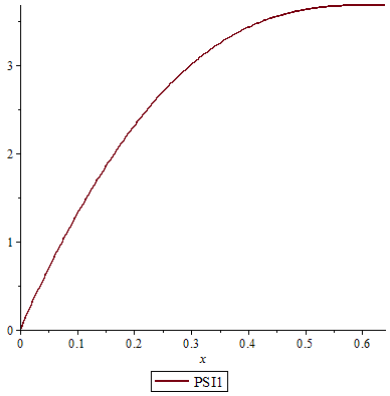


Figure vi- 11 : Comparaison de la dixième fonction modale de déplacement transverse

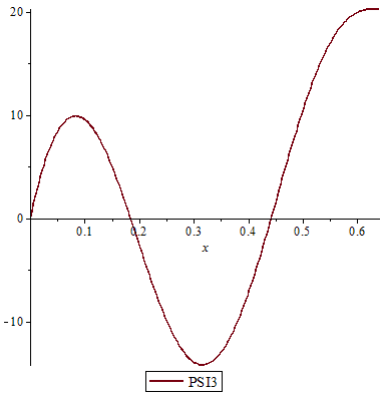
Au plus le numéro de mode est élevé au plus les différences sont grandes. Les fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko sont les suivantes :

Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko

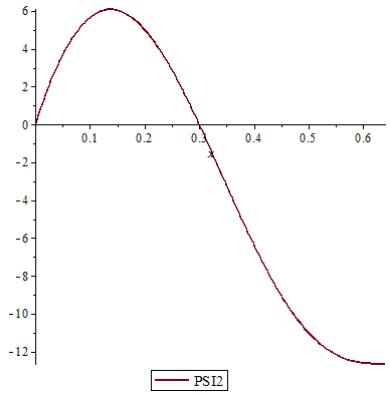
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

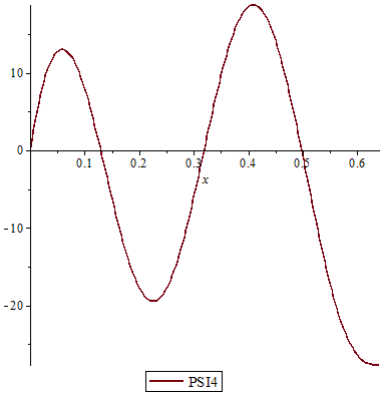


Figure vi- 12 : Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko

L'amplitude des fonctions modales d'angle de flexion est à nouveau croissante avec le numéro de mode. Dans le cas d'une poutre épaisse, la dérivée des fonctions modales W ne sera pas égale aux fonctions modales PSI. Les figures ci-dessous représentent les fonctions modales de cisaillement de la poutre grâce à Timoshenko.

Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

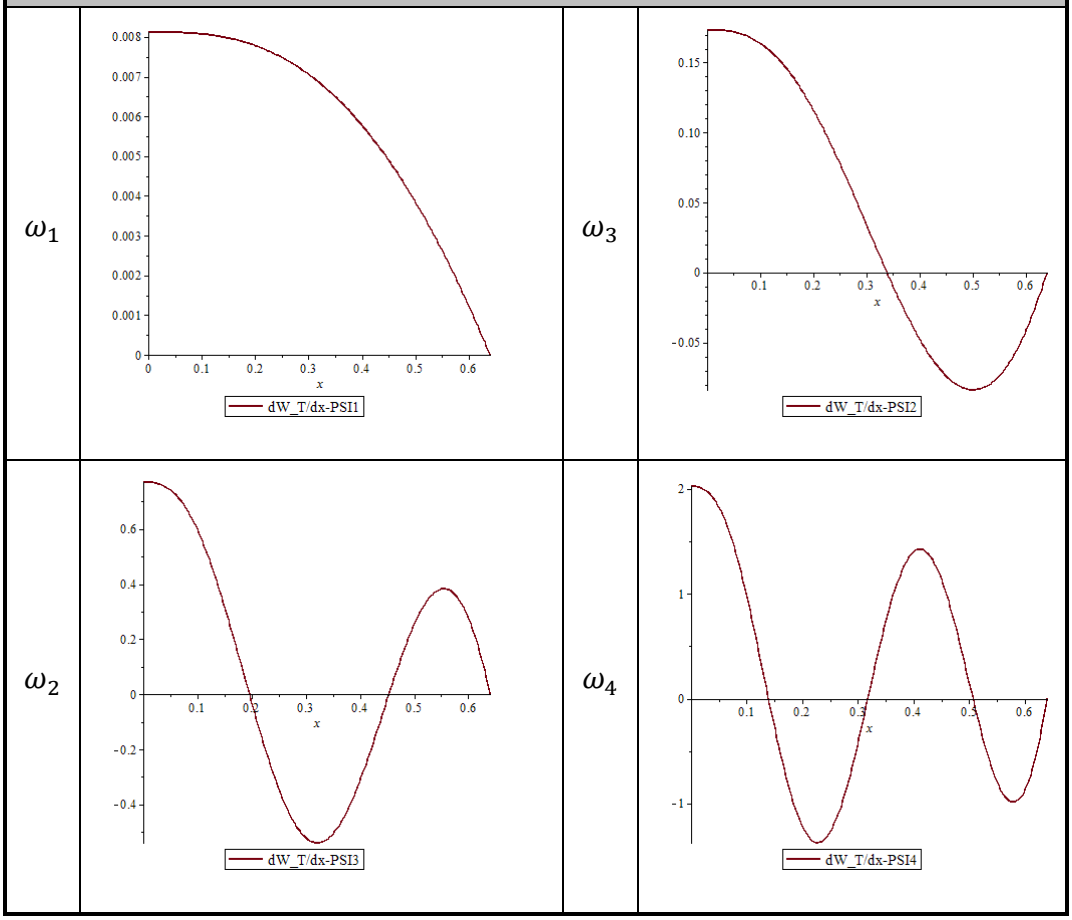


Figure vi- 13 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

Les figures montrent que le cisaillement est toujours nul à l'extrémité libre et que l'amplitude des modes de cisaillement croît avec le numéro de mode, tout comme les fonctions modales PSI. L'amplitude du cisaillement fait un peu plus que doubler avec chaque numéro de mode. Voici le cisaillement du vingtième mode grâce à théorie de Timoshenko :

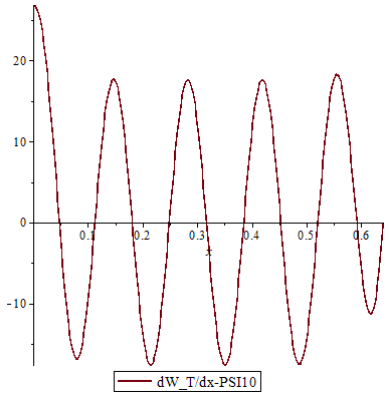


Figure vi- 14 : Dixième fonction modale de cisaillement pour la théorie de Timoshenko

On voit très bien que l'amplitude du cisaillement est plus élevée pour les modes élevés. De plus, le cisaillement est toujours plus élevé à l'extrémité encastrée.

VI.2.2.3. Poutre 3

Le tableau ci-dessous résume les fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales obtenues pour la poutre 2 :

Tableau vi. 19 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3

Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3[Hz]						
	Euler-Bernoulli		Timoshenko		Expérimental	Différence avec Timoshenko analytique
	Analytique	Approximatif	Analytique	Approximatif		
f_1	144.31	144.31	142.66	142.66	126	-11.68%
f_2	904.40	904.40	838.78	838.78	628	-25.13%
f_3	2532.34	2532.34	2155.99	2155.99	2037	-5.52%
f_4	4962.37	4962.37	3818.38	3818.38	?	?

Où les fréquences expérimentales proviennent du spectre fréquentiel suivant :

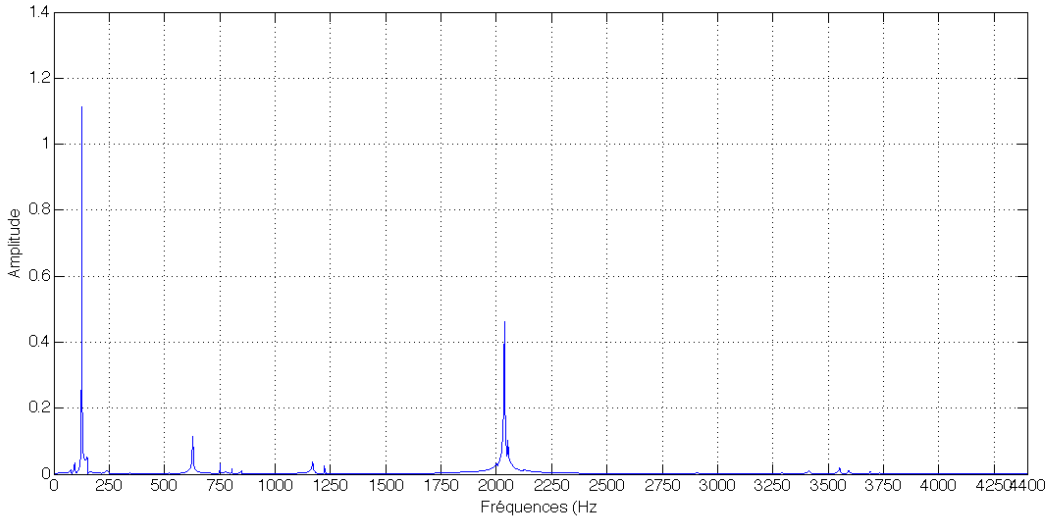


Figure vi- 15 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 3

Comme dans le cas de la poutre 2, les fréquences analytiques et approximatives sont en accord pour chacune des deux théories de poutres. Malheureusement, la quatrième fréquence expérimentale n'a pu être extraite. Ceci est causé par le fait que le spectre fréquentiel de la poutre ne possède pas de pic visible proche de la valeur théorique. Le Tableau vi. 19 montre que la deuxième fréquence expérimentale possède une erreur double par rapport à la première et la troisième fréquence propre analytique de Timoshenko. La cause est probablement une mauvaise lecture de la fréquence propre sur la figure de la transformée de Fourrier. La figure ci-dessous représente un agrandissement de la transformée de Fourrier pour une gamme de fréquences avoisinant la fréquence propre théorique :

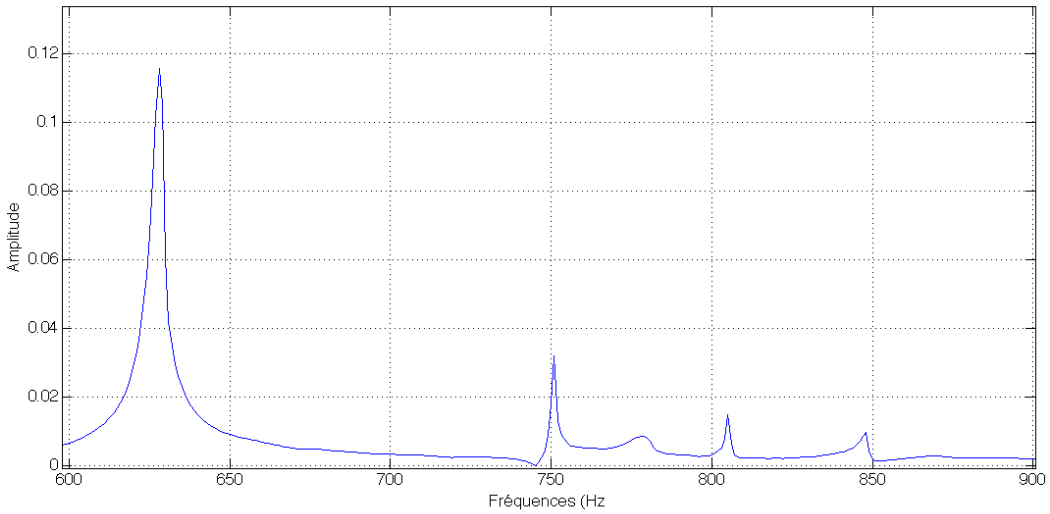


Figure vi- 16 : Agrandissement des fréquences propres expérimentales de la poutre 3

Le grand pic possède la fréquence propre de $628\,Hz$ et incite à croire qu'il représente la fréquence propre recherchée. Cependant, le pic situé à $751\,Hz$ est le plus probable puisque qu'il s'agit de la fréquence qui est plus faible que la fréquence théorique et qui possède l'erreur la plus faible. Le nouveau tableau des fréquences propres devient donc :

Tableau vi. 20 : Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3

Fréquences propres analytiques, approximatives et expérimentales de la poutre 3[Hz]						
	Euler-Bernoulli		Timoshenko		Expérimental	
	Analytique	Approximatif	Analytique	Approximatif	Fréquences	Différence avec Timoshenko analytique
f_1	144.31	144.31	142.66	142.66	126	-11.68%
f_2	904.40	904.40	838.78	838.78	751	-10.47%
f_3	2532.34	2532.34	2155.99	2155.99	2037	-5.52%
f_4	4962.37	4962.37	3818.38	3818.38	?	?

Voici les quatre fonctions modales de déplacement transverse pour les deux théories de poutres.

Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

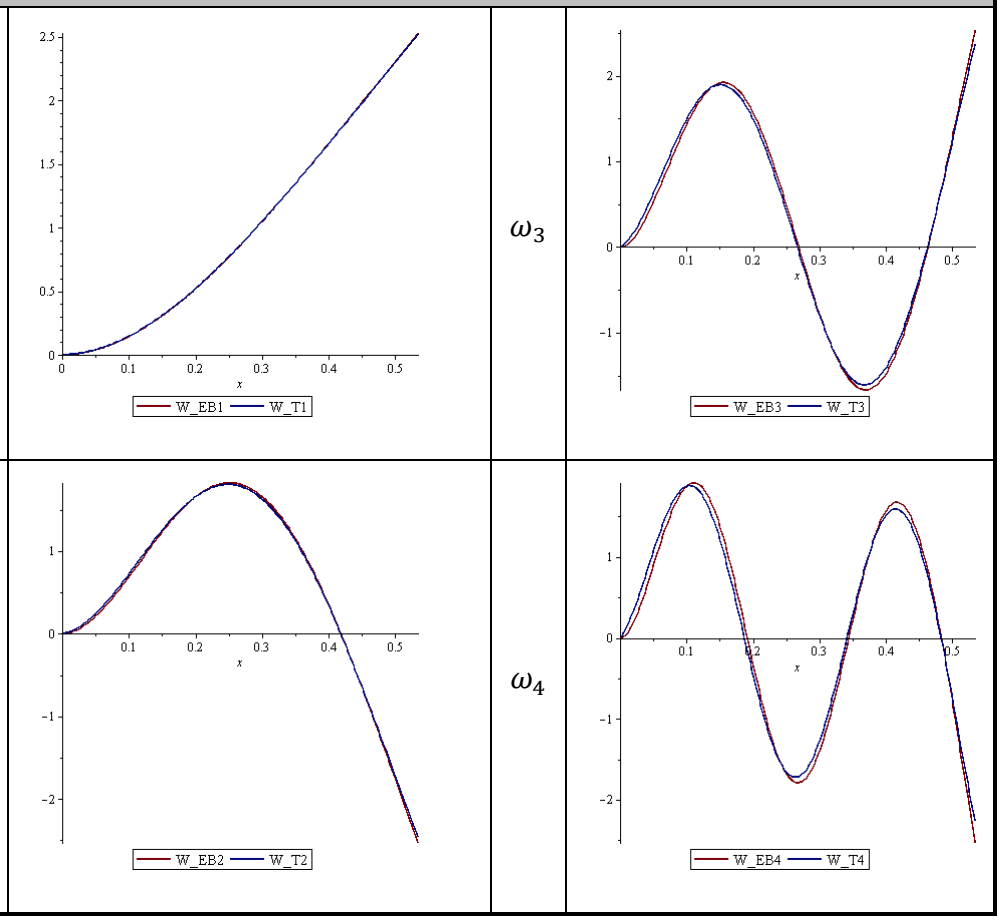


Figure vi- 17 : Comparaison des quatre premières fonctions modales de déplacement transverse

Les fonctions modales ci-dessus se ressemblent mais ne sont pas tout à fait égales. En effet, l'écart entre les fonctions modales W d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko est encore plus grand que dans le cas de la poutre 2. Afin d'illustrer cette différence encore plus les fonctions modales pour le dixième mode sont illustrées ci-dessous :

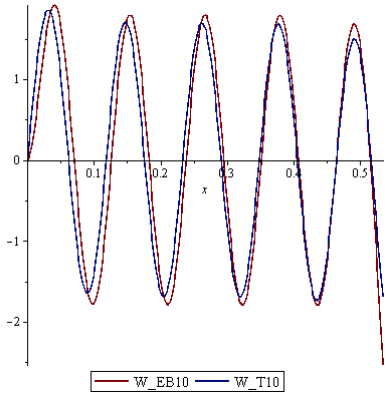
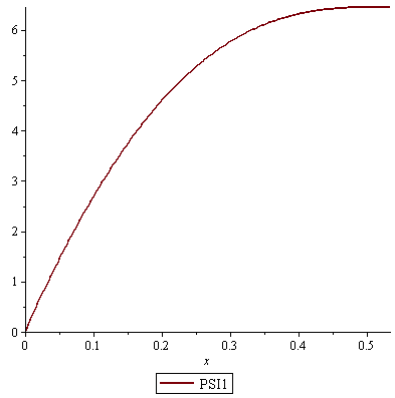


Figure vi- 18 : Comparaison de la dixième fonction modale de déplacement transverse

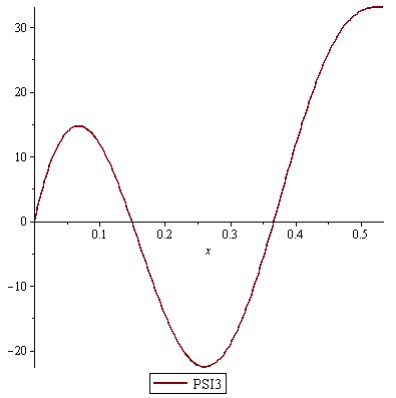
On remarque qu'au plus le numéro de mode est élevé au plus les différences sont grandes. Les fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko sont les suivantes :

Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko

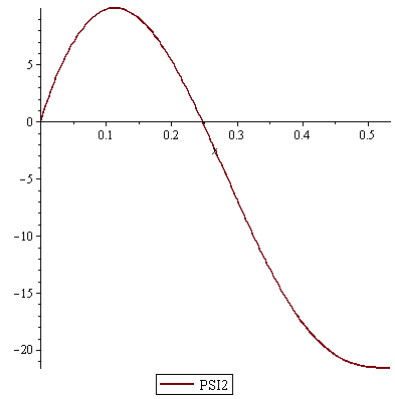
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

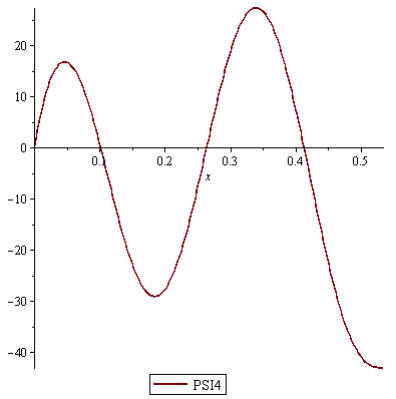
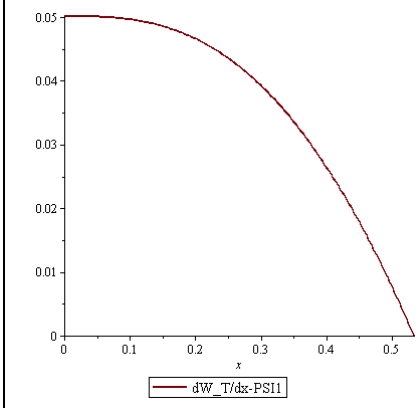


Figure vi- 19 : Quatre premières fonctions modales d'angle de flexion de Timoshenko

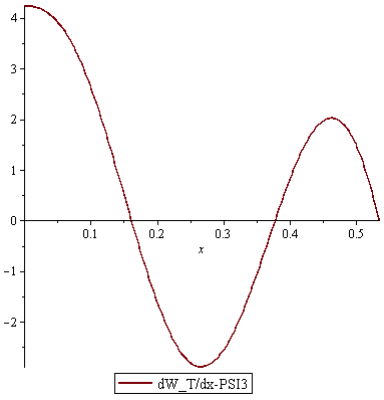
On remarque, à nouveau, que l'amplitude des fonctions modales d'angle de flexion est croissante avec le numéro de mode. Les figures ci-dessous représentent les fonctions modales de cisaillement de la poutre grâce à Timoshenko.

Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

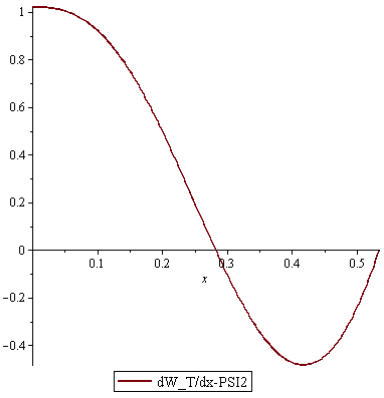
ω_1



ω_3



ω_2



ω_4

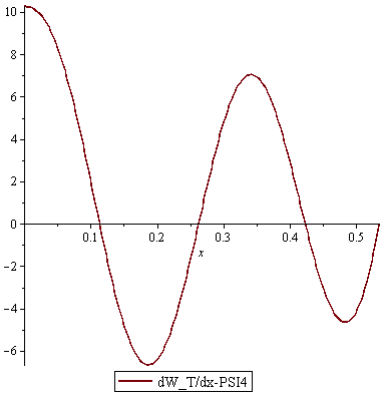


Figure vi- 20 : Quatre premières fonctions modales de cisaillement de Timoshenko

On remarque à nouveau que le cisaillement est toujours nul à l'extrémité libre et que l'amplitude des modes de cisaillement croît avec le numéro de mode, tout comme les fonctions modales PSI. Voici le cisaillement du vingtième mode grâce à théorie de Timoshenko :

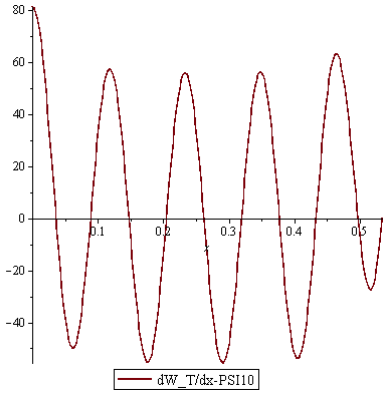


Figure vi- 21 : Dixième fonction modale de cisaillement de Timoshenko

On voit à nouveau très bien que l'amplitude du cisaillement est plus élevée pour les modes élevés et que le cisaillement est toujours plus élevé à l'extrémité encastrée.

VI.2.2.4. Conclusions

La première conclusion est très claire. La méthode des modes assumés est très précise et se porte très bien pour le calcul de poutres homogènes et isotropes à section pleine ou à section creuse lorsqu'il y n'y a pas de couplages. Le cas échéant n'est pas vérifié dans cette étude.

Deuxièmement, au plus le coefficient d'élancement s^* est petit au plus les effets du cisaillement sont visibles. Cette conclusion est en accord avec la théorie des poutres de Timoshenko (Han et al., 1999).

Troisièmement, il semble que les résultats théoriques soient plus fiables que les résultats expérimentaux En effet, le banc d'essais ne représente pas un encastrement parfait, surtout lorsqu'il s'agit de poutres à section creuse non remplie à l'encastrement. L'erreur induite sur les sections creuses à cause du banc d'essais est supérieure à 9% pour le premier mode et atteint des valeurs proches de 5.5% pour le troisième mode.

Quatrièmement, grâce à la méthode des modes assumés et en utilisant les fonctions modales de la théorie de Timoshenko, le cisaillement peut être évalué pour chaque mode. Il s'agit d'une information précieuse. Lors de l'étude de poutres non-isotropes, les fonctions modales de Timoshenko représentent les fonctions modales d'une poutre homogénéisée. L'information sur le cisaillement est donc moins précise par rapport à une poutre isotrope. Cependant, il s'agit d'une information qui peut être utile, bien qu'inexacte.

VI.2.3. Deuxième partie de la validation de la méthode des modes assumés

Dans cette validation la propriété d'homogénéisation d'une poutre homogène sera exploitée d'une autre manière. Plus précisément, un stratifié composé de couches identiques homogènes et isotropes est une représentation alternative équivalente d'une poutre à une seule couche homogène et isotrope d'une épaisseur égale à l'épaisseur totale du stratifié. La figure ci-après illustre ce propos en affichant la section de la poutre :

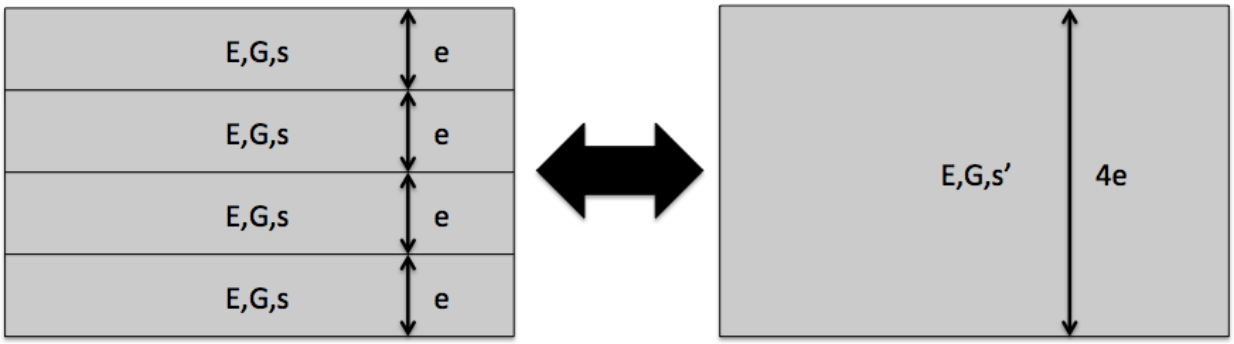


Figure vi- 22 : Équivalence des deux sections de poutre pour un matériau homogène et isotrope

La relation entre les coefficients de minceur d'une couche d'épaisseur e et d'une couche d'épaisseur $4e$ est la suivante :

$$s' = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\frac{1}{4}}}\, s = \frac{1}{4} s \qquad \text{iv. 30}$$

Pour produire les résultats de la poutre 1 du tableau iv. 38 les nombres d'onde et les fonctions modales ont été calculés pour la section d'épaisseur $4e$ et ont été injectées dans l'expression des énergies de la section d'épaisseur $4e$ à nouveau:

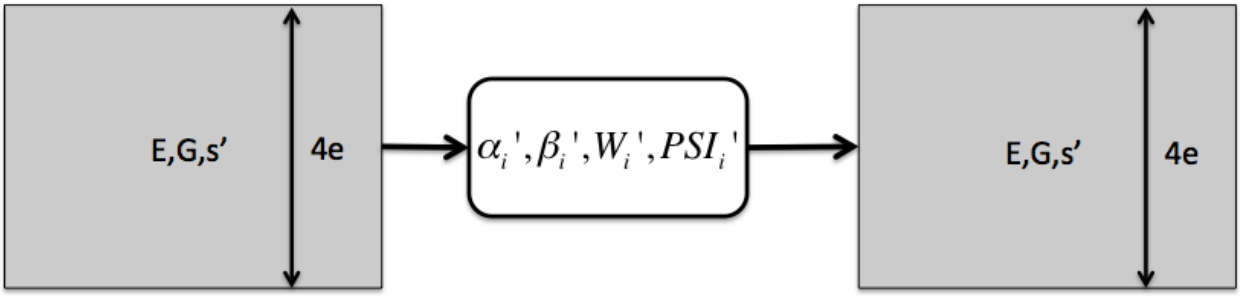


Figure vi- 23: Méthode de calcul classique pour une poutre homogène et isotrope

Les deux cas de calcul illustrés par les Figure vi- 24 et Figure vi- 25 sont étudiés. La preuve que la méthode des modes assumés marche bien sera faite si ces deux cas donnent des résultats proches de ceux du cas de calcul classique illustré par la Figure vi- 23. Les calculs qui suivent sont réalisés avec la théorie de Timoshenko.

VI.2.3.1. Cas de calcul 2

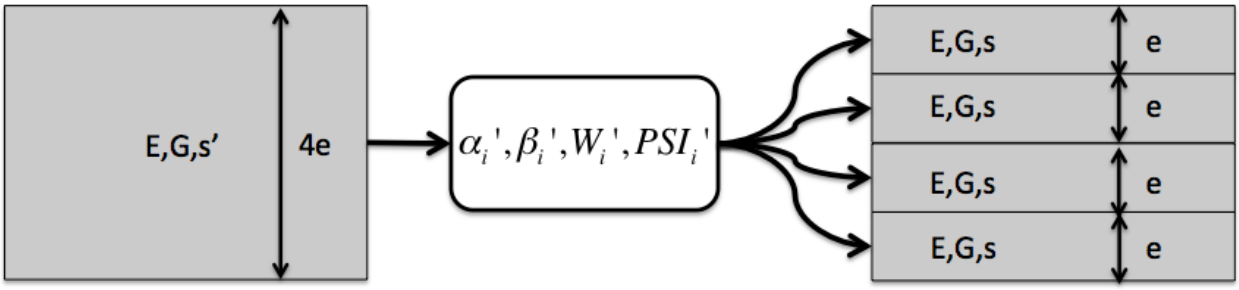


Figure vi- 24 : Cas de calcul 2

Le cas 2 illustré ci-dessus traduit le cas où les fonctions d'onde sont calculées grâce à des nombres d'onde qui ont été calculées à leur tour sur base des propriétés de la poutre d'épaisseur $4e$. Ces fonctions d'ondes sont ensuite injectées dans les énergies potentielles et cinétiques de chaque pli de la section à 4 plis. Les fréquences propres analytiques sont identiques aux fréquences analytiques du cas classique.

VI.2.3.2. Cas de calcul 3

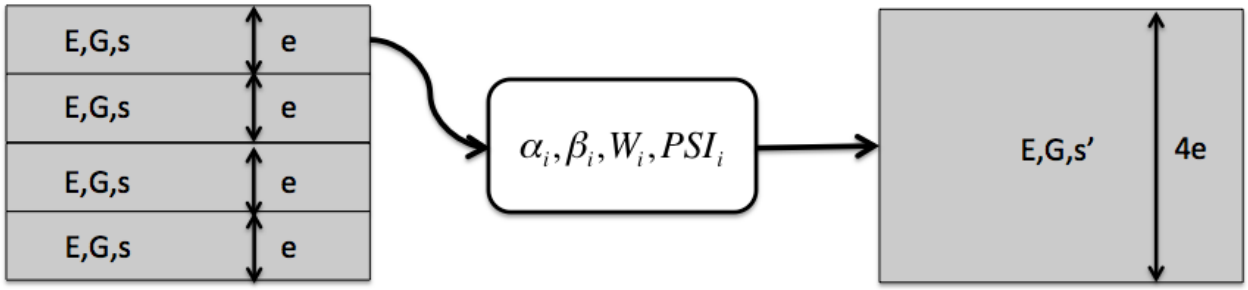


Figure vi- 25 : Cas de calcul 3

Le cas 3 représente l'inverse du cas 2. Dans celui-ci les fonctions d'onde sont calculées grâce à des nombres d'onde qui ont été calculées à leur tour sur base d'un seul pli de la section composée de quatre plis. Ces fonctions d'onde sont ensuite injectées dans les expressions des énergies potentielle et cinétique de la section d'épaisseur $4e$. Dans le cas de calcul 3 les fréquences propres analytiques calculées pour le pli individuel sont évidemment plus faibles :

Tableau vi. 21 : Comparaison du des fréquences analytiques entre le cas classique et le cas 3

Comparaison du des fréquences analytiques entre le cas classique et le cas 3		
	Cas classique	Cas 3
f_1 $[Hz]$	15.955	3.989
f_2 $[Hz]$	99.957	24.997
f_3 $[Hz]$	279.753	69.991
f_4 $[Hz]$	547.833	137.148

VI.2.3.3. Résultats et conclusions

Le tableau ci-dessous résume les fréquences propres approximatives obtenues pour les deux cas avec 10 modes pour la poutre 1.

Tableau vi. 22 : Comparaison du cas 2 et du cas 3 du cas classique

Comparaison du cas 2 et du cas 3 du cas classique [Hz]					
	Cas classique	Cas 2	Erreur Cas 2	Cas 3	Erreur cas 3
f_1	15.955	15.955	0.00%	15.955	0.00%
f_2	99.957	99.957	0.00%	99.980	0.02%
f_3	279.753	279.753	0.00%	279.902	0.05%
f_4	547.833	547.833	0.00%	548.370	0.10%

On remarque que le cas 2 donne exactement le même résultat que dans le cas classique, tandis que le cas 3 surévalue légèrement toutes les fréquences. Il est quand même intéressant de noter que les nombres d'onde calculés dans le cas 3, qui donnent des fréquences propres analytiques très différentes de celles du cas classique, résultent à des fonctions modales grâce auxquelles les fréquences propres approximatives du cas classique sont très bien approchées.

L'analyse du cas 3 est poussée plus loin en effectuant une étude de convergence en fonction du nombre de modes utilisés.

Tableau vi. 23 : Étude de convergence du cas 3 en fonction du nombre de modes

Étude de convergence du cas 3 en fonction du nombre de modes [Hz]					
	Cas 3				
	Cas classique	10 modes	Erreur 10 modes	20 modes	Erreur 20 modes
f_1	15.955	15.955	0.00%	15.955	0.00%
f_2	99.957	99.980	0.02%	99.980	0.02%
f_3	279.753	279.902	0.05%	279.902	0.05%
f_4	547.833	548.370	0.10%	548.370	0.10%

Visiblement, les fréquences propres approximatives du cas 3 ont déjà convergé avec 10 modes.

La raison pour laquelle le cas 2 donne de bons résultats, mais que le cas 3 n'en fait pas autant se trouve dans la manière de calculer les énergies potentielle et cinétique. Ces expressions font intervenir une intégrale de volume qui se décompose en une intégrale selon les trois axes de la poutre étudiée. Prenons par exemple le premier terme de l'énergie potentielle décrite par l'équation iv. 14.

$$\frac{1}{2}\int_V E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t)\right)^2 dV \qquad \text{iv. 31}$$

Lorsque la poutre avec une seule couche est considérée, ce terme est calculé de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{h_{tot}}{2}}^{\frac{h_{tot}}{2}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t)\right)^2\right)_{CAS\ CLASSIQUE} dz\ dy\ dx \qquad \text{iv. 32}$$

Tandis que pour une poutre avec plusieurs couches :

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sum_{u=1}^{k} \int_{h_u}^{h_{u+1}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ 2} dz\ dy\ dx \qquad \text{iv. 33}$$

où les composantes h désignent le plan bas et le plan haut de chaque pli. Dans le cas classique et dans le cas 2 le contenu de cette intégrale, ainsi que des autres intégrales dans les expressions des énergies, sont identiques. Le résultat de l'intégrale par partie est donc le même que l'intégrale classique, menant aux mêmes fréquences propres.

$$\left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ CLASSIQUE} = \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ 2} \qquad \text{iv. 34}$$

donc,

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{h_{tot}}{2}}^{\frac{h_{tot}}{2}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ CLASSIQUE} dz\ dy\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sum_{u=1}^{k} \int_{h_u}^{h_{u+1}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ 2} dz\ dy\ dx \qquad \text{iv. 35}$$

Plus précisément, les fréquences approximatives sont identiques parce que les expressions des énergies résultent à des matrices de rigidité et de masse égales :

$$[\boldsymbol{K}]_{CAS\ CLASSIQUE} = [\boldsymbol{K}]_{CAS\ 2}$$
$$[\boldsymbol{M}]_{CAS\ CLASSIQUE} = [\boldsymbol{M}]_{CAS\ 2} \qquad \text{iv. 36}$$

Cependant, les résultats du cas 3 ne sont pas identiques au cas classique pour une raison analogue :

$$\left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ CLASSIQUE} \neq \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ 3} \qquad \text{iv. 37}$$

et donc,

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{h_{tot}}{2}}^{\frac{h_{tot}}{2}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ CLASSIQUE} dz\ dy\ dx \qquad \text{iv. 38}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sum_{u=1}^{k} \int_{h_u}^{h_{u+1}} \left(E_x z^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} PSI_i(x) q_i(t) \right)^2 \right)_{CAS\ 3} dz\ dy\ dx$$

et donc,

$$[\boldsymbol{K}]_{CAS\ CLASSIQUE} \neq [\boldsymbol{K}]_{CAS\ 3}$$

iv. 39

$$[\boldsymbol{M}]_{CAS\ CLASSIQUE} \neq [\boldsymbol{M}]_{CAS\ 3}$$

Dans le mémoire de François Horel (Horel, 2013) chaque pli d'un stratifié possède ses propres variables de déplacement et donc ses propres nombres d'onde, fonctions modales et coordonnées modales. Ceci mène à des matrices de masse et de rigidité de dimensions plus élevées, mais surtout à des vecteurs de coordonnées modales de dimension plus élevées. Dans ce cas, les solutions du problème pourraient être calculées de la manière suivante :

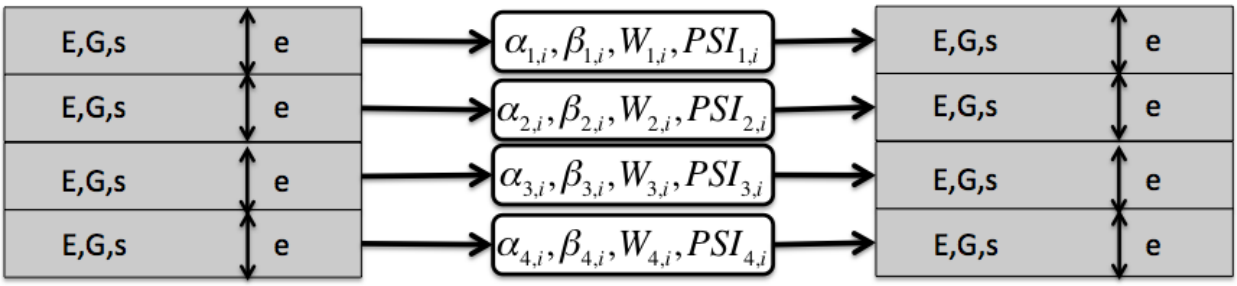


Figure vi- 26 : Cas de calcul 4

où $\alpha_{1,i}$ représente le $i^{ème}$ mode de la première couche et ainsi de suite. Ce cas n'a pas été programmé dans le code présent, mais peut faire l'étude de recherches futures.

VI.3. Conclusions de l'annexe

Cette annexe permet de valider le bon fonctionnement du code pour des sections pleines et des sections creuses, mais également de démontrer que les erreurs obtenues entre les résultats théoriques et expérimentaux sont attribuées en grande partie au banc d'essais. Les résultats théoriques incorporent les résultats analytiques et approximatifs puisqu'ils sont toujours en parfait accord pour des poutres isotropes. Le schéma ci-dessous permet de mieux comprendre l'hypothèse ci-dessus :

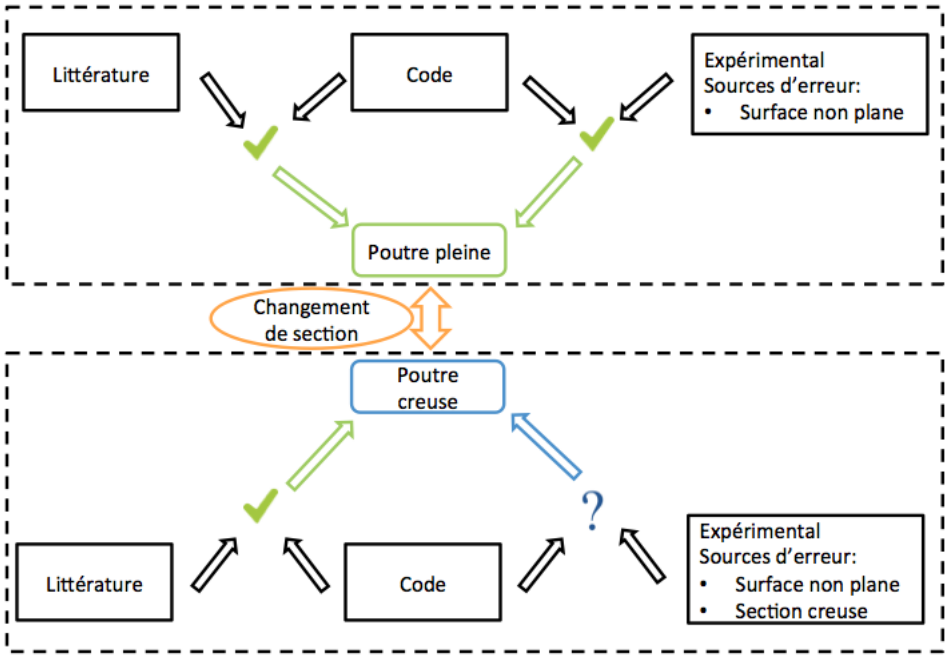


Figure vi- 27 : Validation du code avec matériaux homogène pour des sections pleines et des sections creuses

La partie du dessus de la figure concerne la poutre pleine, tandis que la partie du bas concerne les poutres creuses. La validation des résultats du code avec les résultats de la littérature sont en très bon accord pour la poutre pleine, ainsi que pour les poutres creuses. Les résultats sont également en accord avec les résultats du banc d'essais pour la poutre pleine, mais le sont significativement moins pour les poutres creuses. Ces écarts proviennent donc fort probablement du banc d'essais qui n'est possiblement pas être adapté aux essais de poutres creuses. Il faut encore essayer d'identifier les sources d'erreurs. Sachant que les surfaces en contact avec le banc d'essais ne sont pas parfaitement planes ni pour la poutre pleine, ni pour les poutres creuses, en se souvenant que les surfaces non parfaitement planes de la poutre pleine n'ont pas empêché sa validation expérimentale, il en est conclu que les erreurs entre les résultats théoriques et expérimentaux pour les poutres creuses surviennent du fait que les sections sont creuses. Plus précisément, la cause peut être une longueur d'encastrement pas suffisante, ou même des poutres dont la longueur d'encastrement est creuse plutôt que d'être remplie.

Donc, bien que les écarts entre les résultats théoriques et expérimentaux soient de l'ordre de 10%, le modèle théorique est plus fiable. Cette hypothèse sera également valable pour les fréquences propres des poutres multicouches en composites.

L’estimation de l’erreur pour une poutre creuse possédant des surfaces non planes est présentée ci-dessous. Il s’agit de l’écart entre les fréquences expérimentales et les fréquences théoriques qui sont supposées proches des fréquences que l’on aurait obtenu expérimentalement si le banc d’essais mesurait correctement les fréquences propres des poutres. Ce résultat contribue à la validation du modèle construit.

L’hypothèse est faite que l’erreur entre les fréquences propres expérimentales et les fréquences propres théoriques pour des sections creuses avec des surfaces non planes sont données par la moyenne des résultats de la poutre 2 et la poutre 3.

Tableau vi. 24 : Erreur causée par les sections creuses et les surfaces non-planes

Erreur causée par les sections creuses et les surfaces non-planes [Hz]			
	Erreur poutre 2	Erreur poutre 3	Erreur section creuse
f_1	-9.54%	-11.68%	-10.61%
f_2	-7.90%	-10.47%	-9.19%
f_3	-5.93%	-5.52%	-5.73%
f_4	-4.32%	?	-4.32%

Il est possible d’estimer l’erreur causée par les sections creuses uniquement, et ce, pour chaque mode en moyennant les écarts entre les fréquences propres expérimentales et théoriques des poutres 2 et 3 et en y soustrayant les erreurs obtenues pour la poutre 1.

Tableau vi. 25 : Erreur causée par les sections creuses uniquement

Erreur causée par les sections creuses uniquement	
	Erreur section creuse
f_1	-10.30%
f_2	-7.23%
f_3	-4.03%
f_4	-2.53%

L’erreur de la section creuse aurait donc un impact plus prononcé sur les premières fréquences propres et plus particulièrement sur la première fréquence propre. Son impact est presque négligeable pour les modes élevés.

ANNEXE VII. Méthodologie pour produire un spectre fréquentiel expérimental équilibré

Les essais expérimentaux de cette annexe sont réalisés sur la poutre 1 en composite. Dans cette section l'influence de plusieurs paramètres sur les pics fréquentiels est étudiée, mais sans pour autant essayer d'identifier le type de vibration auquel appartient chaque pic.

VII.1.Effet du moment de serrage des vis sur le spectre fréquentiel

Les poutres en composites ne peuvent soutenir des efforts aussi élevés à l'encastrement que les poutres métalliques testées dans l'annexe 4, sous risque de briser les fibres et de modifier le comportement vibratoire de la poutre. Cependant, il est nécessaire de serrer suffisamment fort pour simuler un encastrement aussi bien que possible.

Une étude de répétabilité a d'abord été menée sur la poutre en composite numéro 1. Cette étude consiste à tester la poutre avec deux moments de serrages différents et de réaliser deux essais avec démontage et remontage sur le banc d'essais pour chaque moment de serrage. De cette manière l'intégrité structurelle de la poutre soit assurée. Les deux moments de serrage des vis choisis sont $20\ lb.in$ et $40\ lb.in$.

Pour cette étude, la sensibilité du vibromètre laser a été réglée à $10\frac{mm\ s}{V}$, l'embout en nylon blanc a été utilisé sur le marteau instrumenté et la poutre était impactée proche de la base afin d'exciter le plus possible les hautes fréquences.

VII.1.1. Serrage à 20 lb*in

Les deux essais ont produit les résultats suivants :

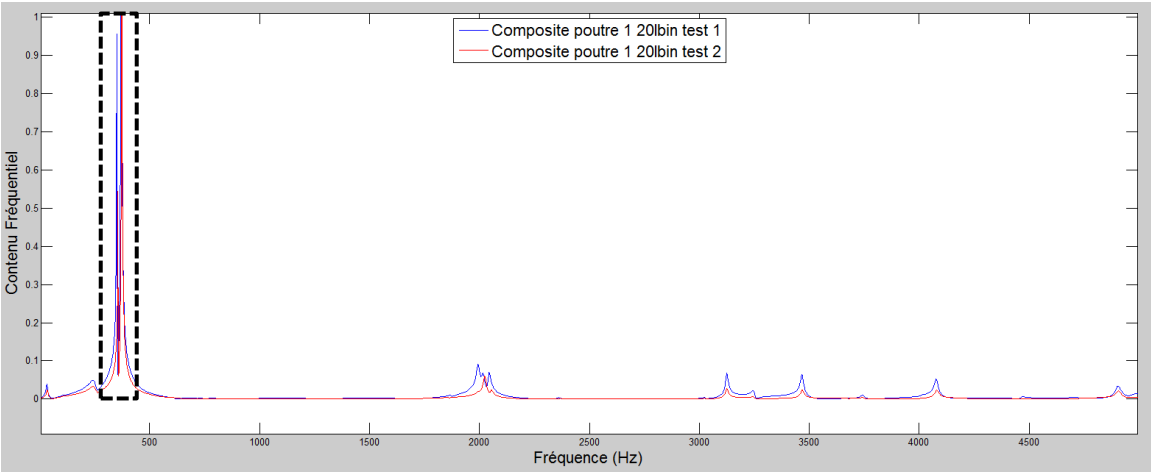


Figure vii- 1: Essais répétabilité de la poutre 1 avec moment de serrage de 20 $lb.in$

Voici une vue élargie du contenu fréquentiel de la boite avec des traits interrompus de la figure

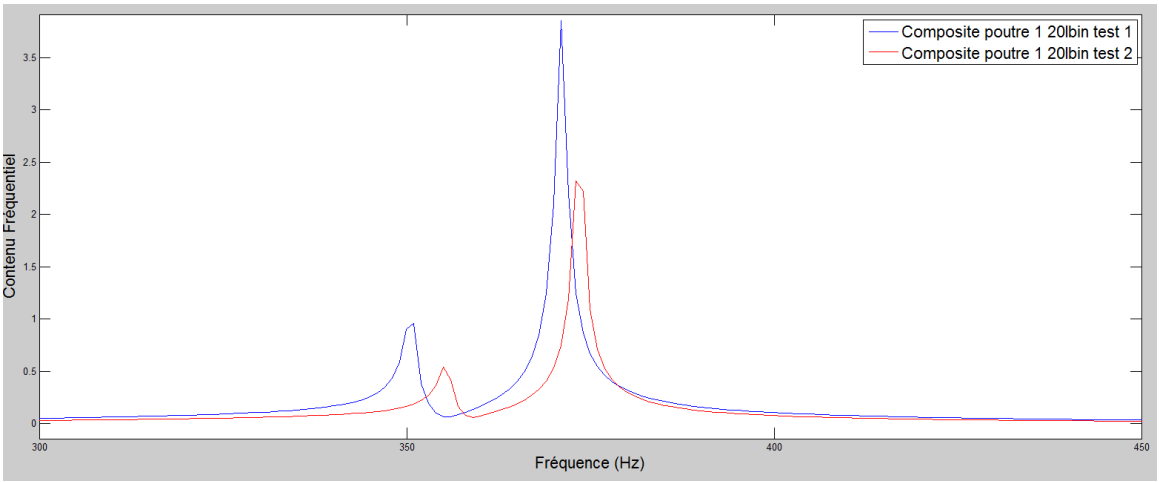


Figure vii- 2 : Élargissement de la Figure vii- 1

Il est clair que cet essai excite surtout les basses fréquences. La meilleure méthode pour exciter les hautes fréquences un peu plus sera présentée par la suite.

VII.1.1.1. Comparaison

Il existe une légère variabilité dans les résultats présentés. Étant donné que pour ce moment de serrage aucun son de bris de fibre n'a été remarqué, la variabilité des résultats est probablement due à la variabilité du positionnement relatif de la poutre avec le banc d'essais.

VII.1.1.2. Serrage à 40 lb*in

Pendant le montage sur le banc d'essais, des faibles sons de craquement sont survenus. Lors inspection de la poutre sur l'encastrement il a été remarqué que l'une des arrêtes de la poutre, qui présentait un défaut de fabrication, a été légèrement déformée. Cette arrête est possiblement la source des faibles sons de craquement mentionnés. La photo ci-dessous montre l'arrête en question :

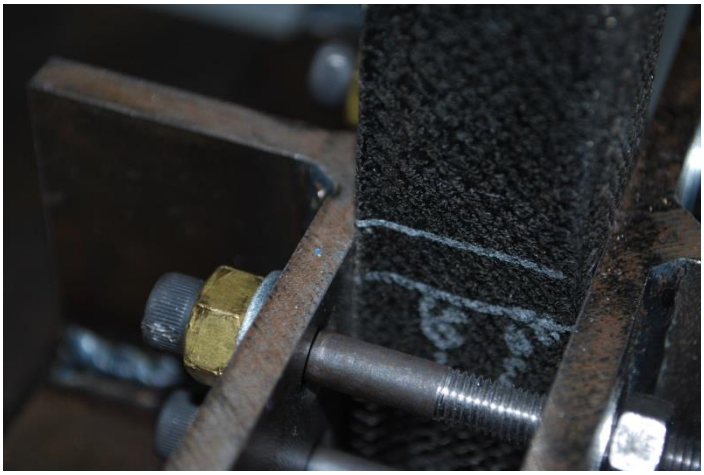


Figure vii- 3 : Arrête déformée de la poutre 1 lors du montage

Ces deux essais produisent les résultats suivants :

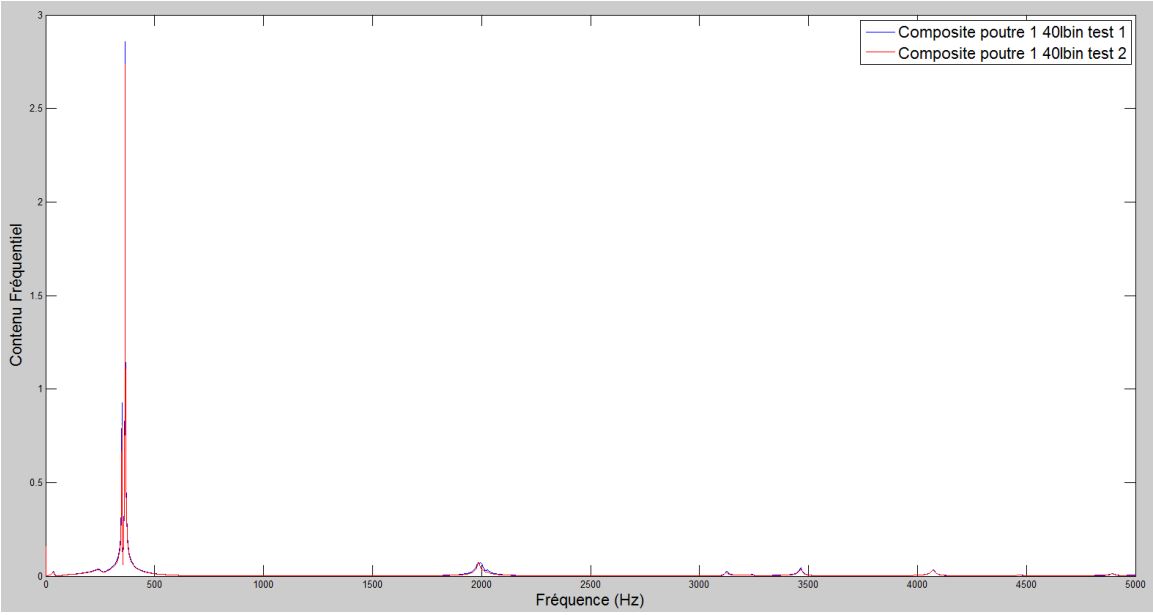


Figure vii- 4 : Essais de répétabilité pour moment de serrage de $\boldsymbol{40\ lb * in}$

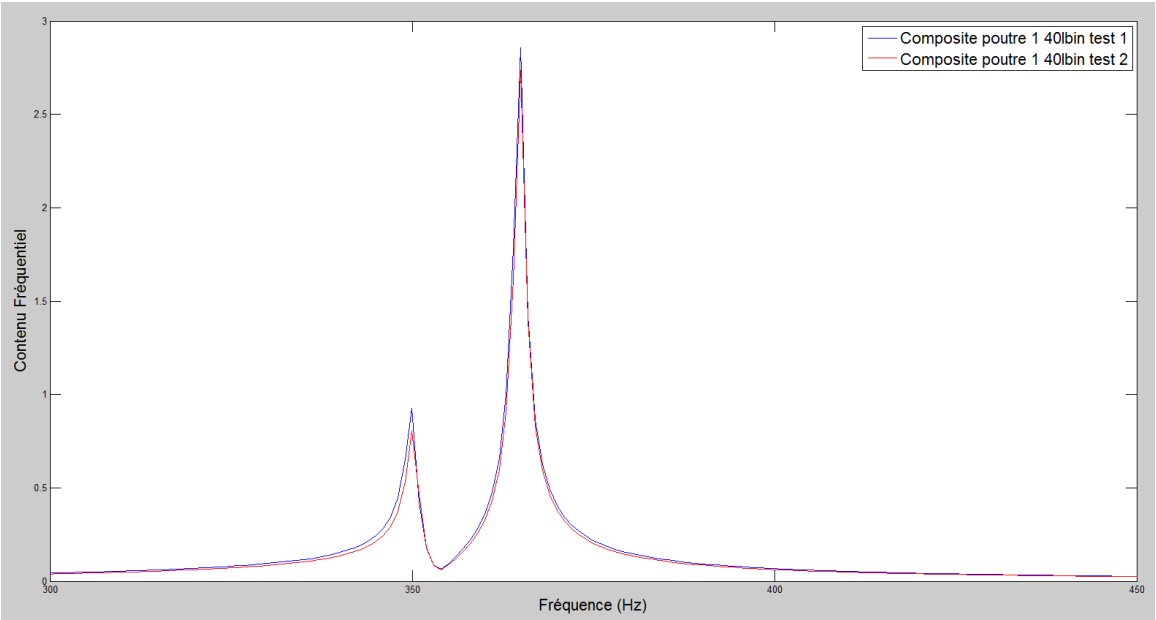


Figure vii- 5 : Agrandissement de la Figure vii- 4

VII.1.1.3. Comparaison

Ces deux essais possèdent des écarts beaucoup moins importants que dans le cas précédent. Les faibles sons de craquement semblent avoir eu un effet négligeable sur le comportement global de la courbe.

VII.2.Comparaison serrage 20 lb*in et 40 lb*in

L'objet de ce paragraphe est de comparer les résultats obtenus entre les deux moments de serrage.

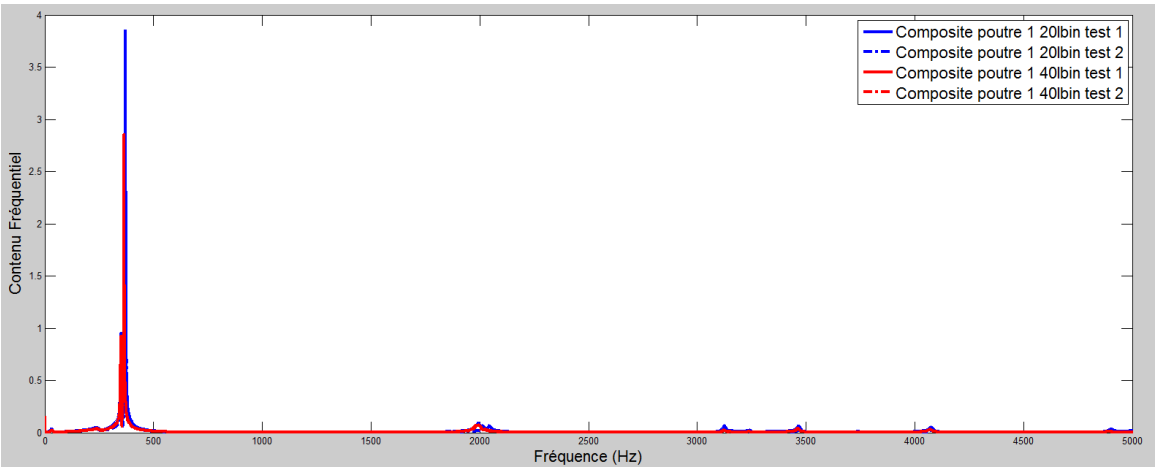


Figure vii- 6 : Comparaison des spectres pour les deux moments de serrage

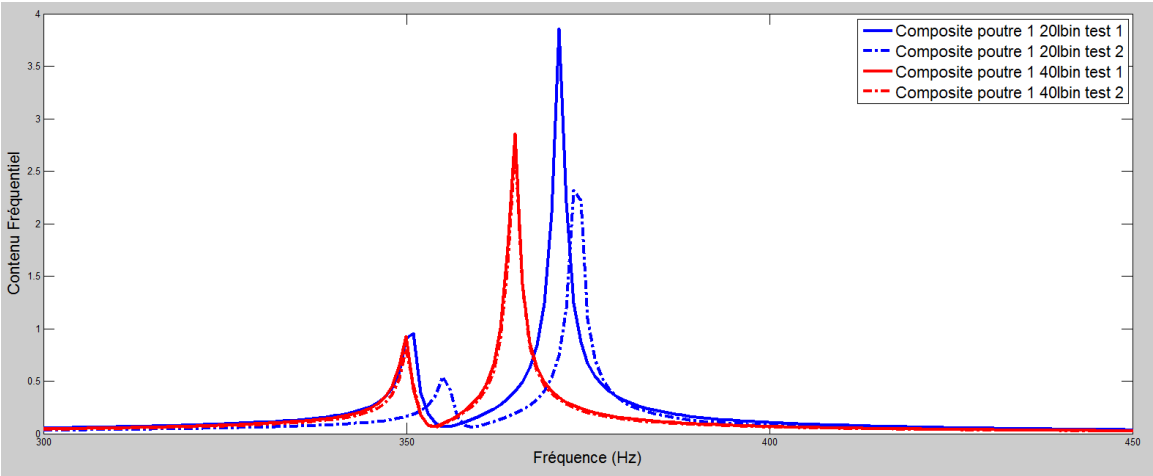

Composite poutre 1 20lbin test 1
Composite poutre 1 20lbin test 2
Composite poutre 1 40lbin test 1
Composite poutre 1 40lbin test 2
Contenu Fréquentiel
Fréquence (Hz)

Figure vii- 7 : Agrandissement de la Figure vii- 6

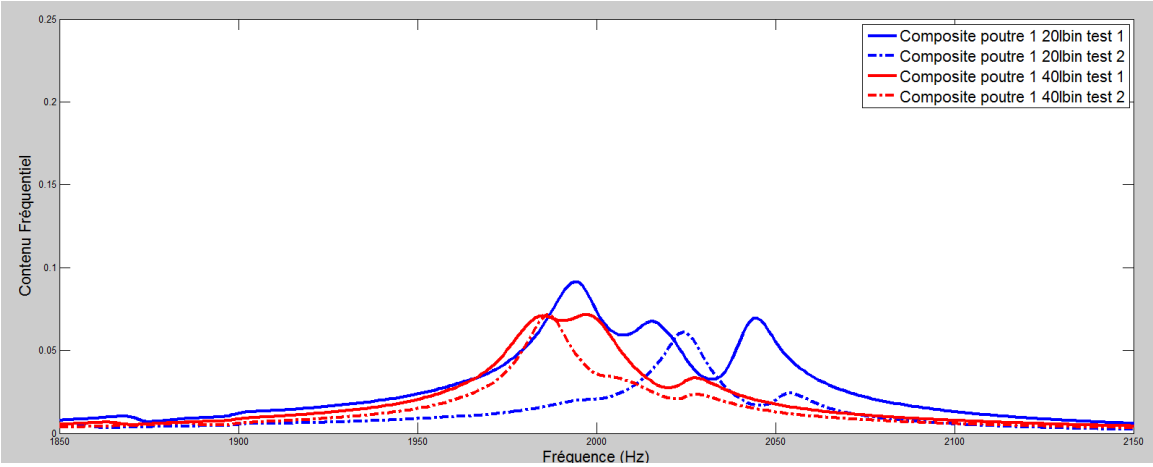

Composite poutre 1 20lbin test 1
Composite poutre 1 20lbin test 2
Composite poutre 1 40lbin test 1
Composite poutre 1 40lbin test 2
Contenu Fréquentiel
Fréquence (Hz)

Figure vii- 8 : Agrandissement de la Figure vii- 6

VII.2.1. Comparaison

Le serrage de 40 $lb.in$ semble avoir comme influence d'abaisser les fréquences propres. Ceci n'a pas l'air logique. À priori une plus grande force de serrage devrait produire une plus grande force de rappel et ainsi augmenter la valeur des fréquences propres.

Tableau vii. 1: Nombres d'onde d'une poutre d'Euler-Bernoulli pour des conditions aux limites classiques (Leissa, 2011)

β_n	$C-C$	$C-SS$	$C-F$	$SS-SS$	$SS-F$	$F-F$
1	22,373	15,418	3,516	9,8696	0	0
2	61,673	49,965	22,034	39,478	15,418	0
3	120,903	104,248	61,697	88,826	49,965	22,373
4	199,859	178,27	120,902	157,914	104,248	61,673
5	298,556	272,031	199,86	246,74	178,27	120,903

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad \text{vii. 1}$$

En effet, une poutre doublement encastrée possède des fréquences propres plus élevées qu'une même poutre simplement supportée ou même libre-libre.

L'abaissement des fréquences propres pourrait être également expliqué une variabilité du positionnement relatif de la poutre par rapport au banc d'essais, mais il se peut que d'autres phénomènes interviennent, qui sont eux, provoqués par la compression de la section à l'encastrement par exemple.

VII.3.Effet du type d'embout

Dans ce paragraphe l'effet de deux embouts du marteau instrumenté sur les spectres fréquentiels est étudié. Le premier embout est l'embout blanc et le deuxième embout est celui en acier inoxydable. Les figures ci-dessous ont été obtenues en impactant la poutre proche de l'encastrement et en réglant la sensibilité du vibromètre laser à $10\frac{mm\,s}{V}$. De plus, les deux essais ont été réalisés sans démontage/remontage de la poutre sur le banc d'essais pour éliminer la variabilité des résultats dus à la variabilité du positionnement relatif de la poutre par rapport au banc d'essais.

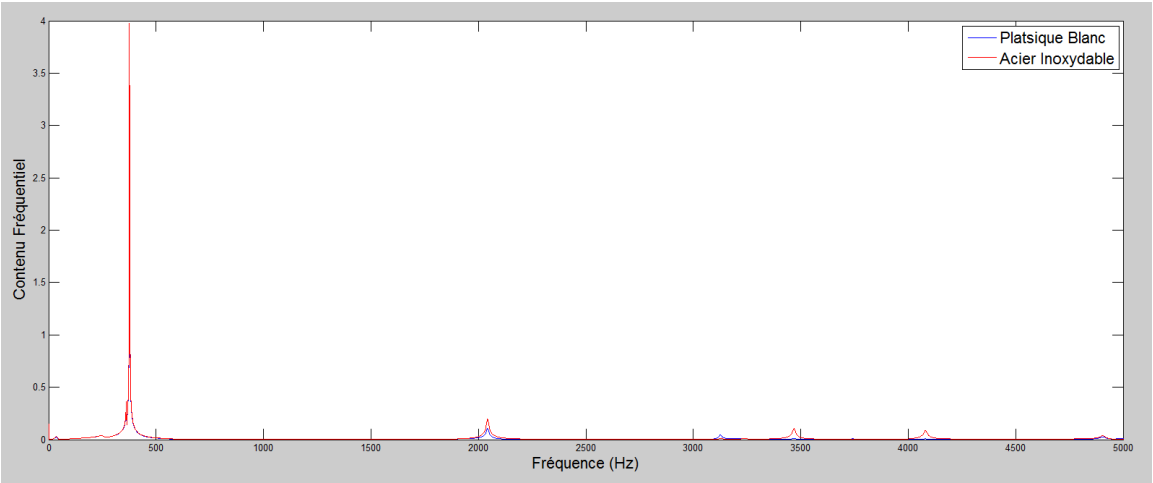


Figure vii- 9 : Effet de l'embout du marteau instrumenté sur les spectres fréquentiels

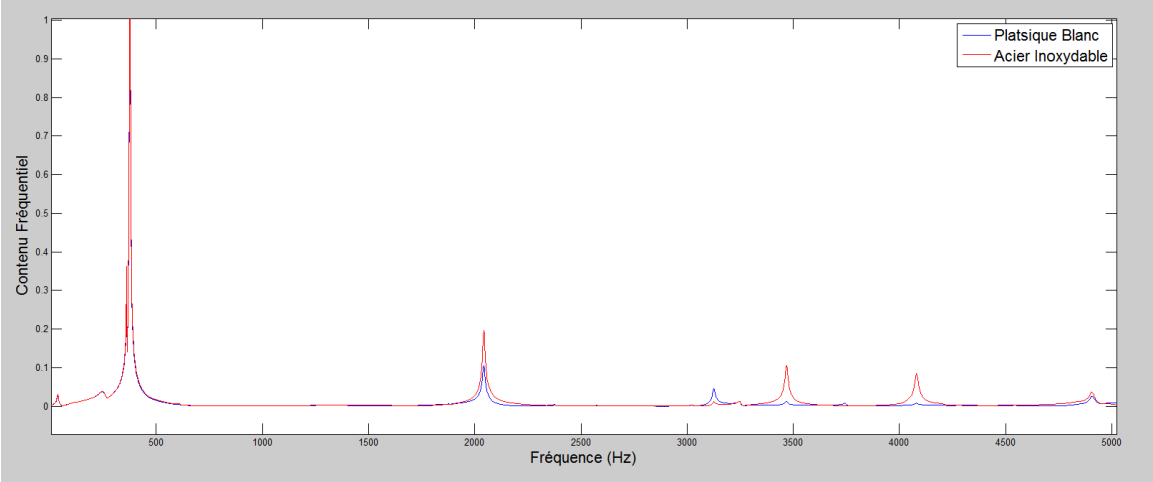


Figure vii- 10 : Agrandissement de la Figure vii- 9

VII.3.1. Comparaison

Les figures ci-dessus montrent que les pics fréquentiels possèdent exactement les mêmes valeurs pour les deux types d'embouts du marteau instrumenté. Cependant, La majorité des pics fréquentiels possédant des fréquences supérieures à 2000 Hz sont plus visibles lorsque la poutre est impactée avec l'embout en acier inoxydable. L'embout en acier inoxydable est donc plus adapté à notre application.

VII.4.Effet de la hauteur de frappe

En théorie, les hautes fréquences sont plus excitées lorsque la poutre est impactée proche de l'encastrement. Pour cette expérience, deux hauteurs de frappe différentes ont été choisies. La première proche de l'encastrement, comme dans la section précédente, et la deuxième, légèrement en dessous du milieu de la poutre. La raison de ce choix est simple. Il était impossible de frapper plus haut que la hauteur mentionnée sans produire des doubles impacts.

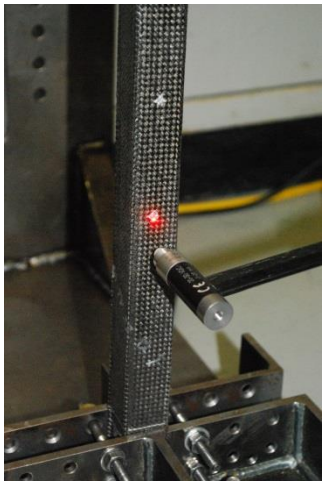


Figure vii- 11 : Position de frappe moyenne

Ces essais ont également été réalisés sans démontage/remontage du banc d'essais pour éliminer les variabilités causées par le positionnement relatif de la poutre par rapport au banc d'essais. De plus, le moment de serrage pour ces deux essais était de $40\ lb.in$, la sensibilité du vibromètre laser pour la frappe proche de l'encastrement était réglée à $10\frac{mm\ s}{V}$ et à $50\ \frac{mm\ s}{V}$ pour la hauteur moyenne pour éviter qu'il ne sature. Les résultats produits avec une sensibilité du vibromètre plus faible sont quand même suffisamment précis. Voici les spectres obtenus :

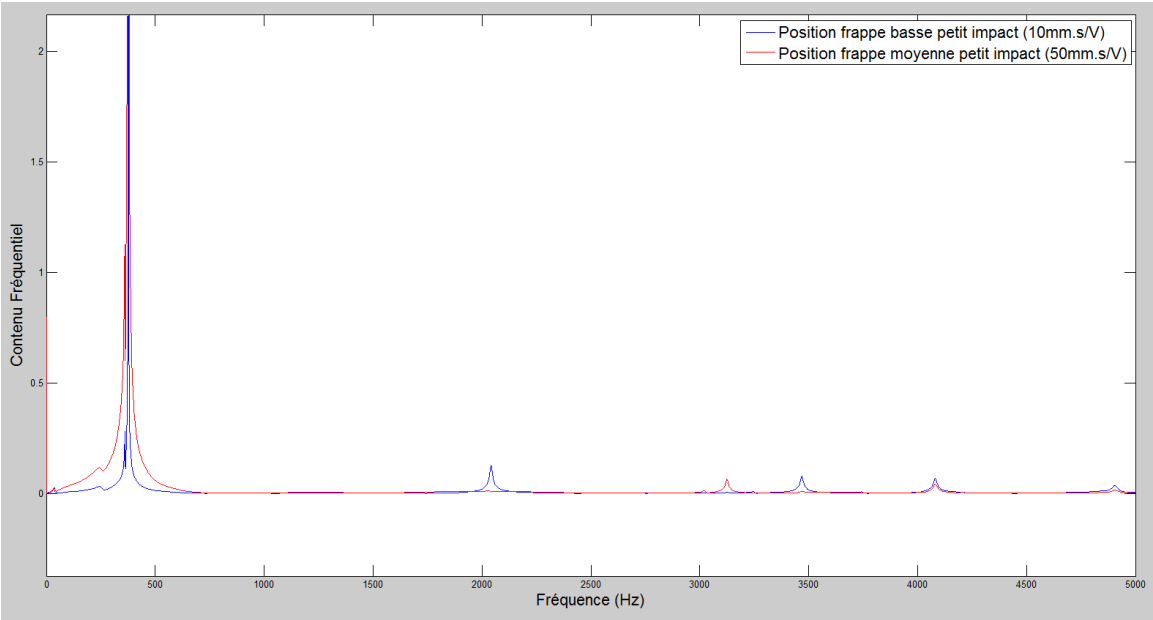


Figure vii- 12 : Effet de la position de frappe sur le spectre fréquentiel

VII.4.1. Comparaison

Lorsque la poutre est impactée proche de l'encastrement le premier gros pic est plus concentré, et est donc moins amorti. Deuxièmement, les fréquences propres plus élevées sont généralement plus excitées.

VII.5.Effet de la force d'impact

Lors des essais précédents, l'impact fourni à la poutre était faible. Dans cette partie, l'effet de la force d'impact sur les fréquences propres est analysé en frappant toujours proche de l'encastrement. Voici l'allure relative de deux impacts typiques, l'un faible et l'autre plus fort :

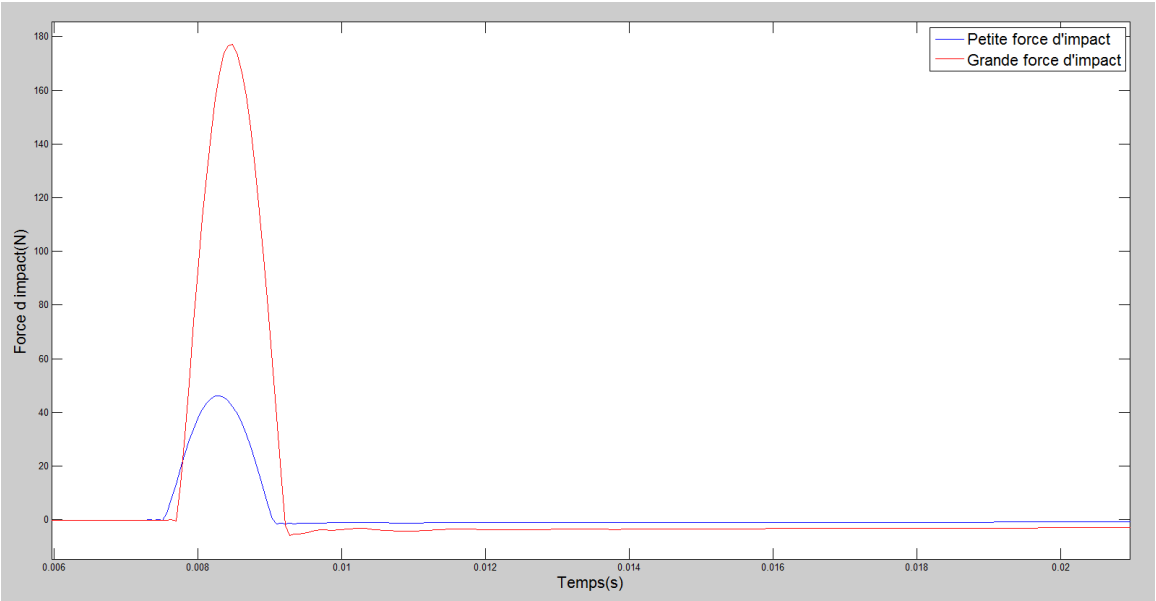


Figure vii- 13 : Illustration des forces d'impact

Pour les grands impacts, la sensibilité du vibromètre laser a dû être réglée à 50 $\frac{mm\ s}{V}$ pour éviter la saturation. Voici les deux spectres fréquentiels obtenus :

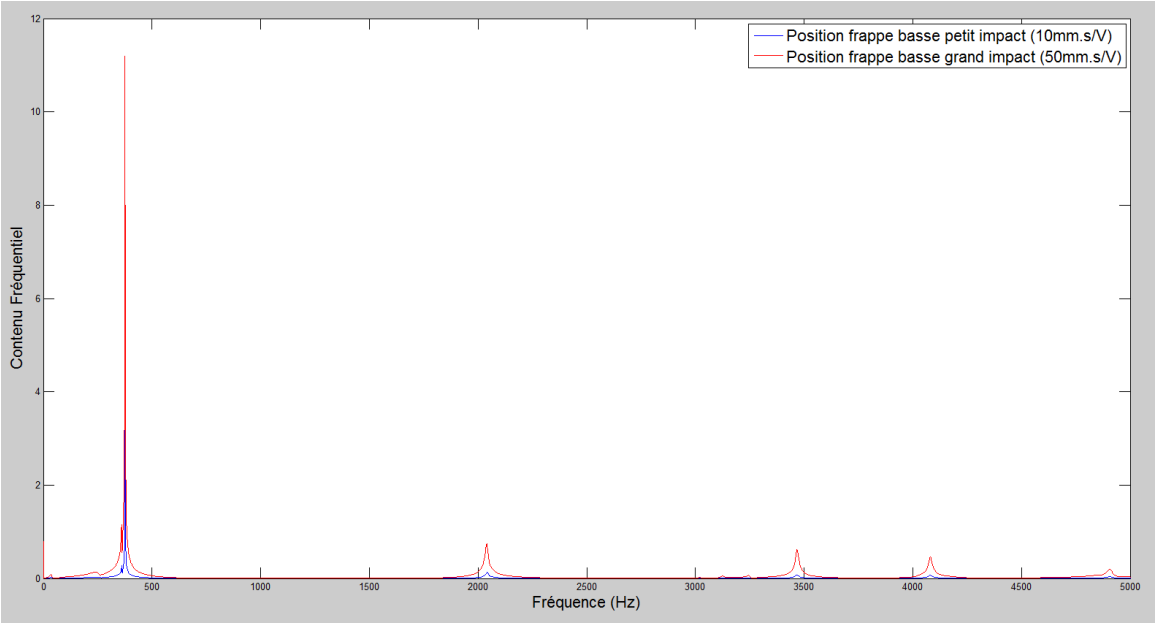

Position frappe basse petit impact (10mm.s/V)
Position frappe basse grand impact (50mm.s/V)
Contenu Fréquentiel
Fréquence (Hz)

Figure vii- 14 : Influence de la force d'impact sur les spectres fréquentiels

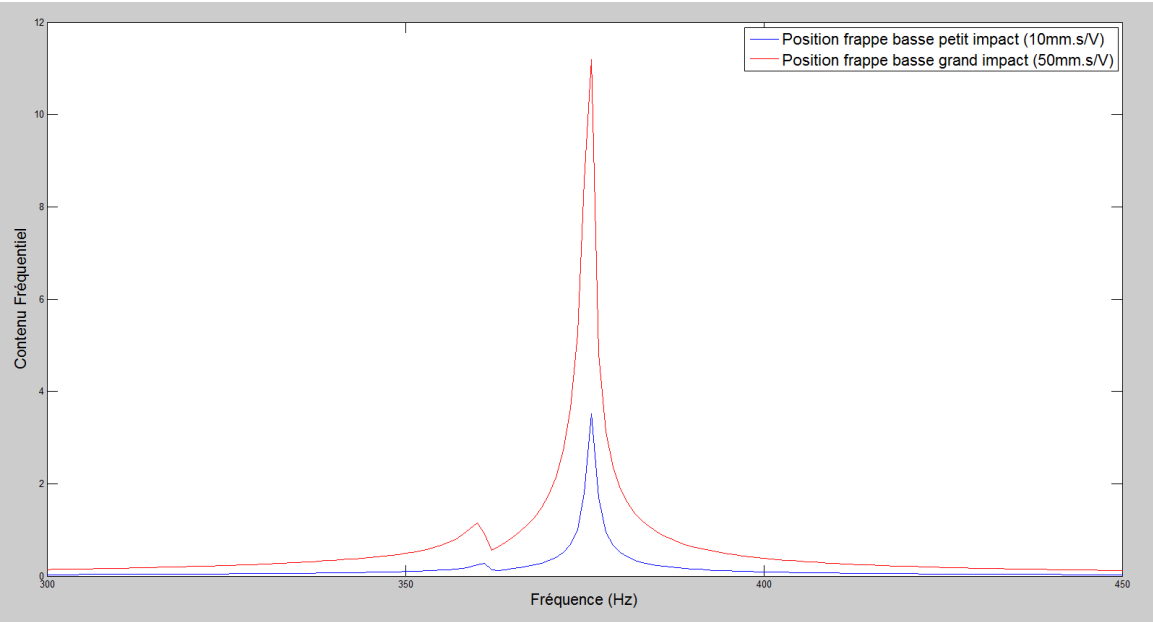


Figure vii- 15 : Agrandissement de la Figure vii- 14

VII.5.1. Comparaison

Ces figures illustrent très bien que des impacts plus forts produisent des spectres dans lesquels les fréquences élevées sont plus excitées. De plus, les fréquences correspondantes sont sensiblement proches des fréquences obtenues avec de faibles impacts. Un deuxième élément en ressort également. Pour l'application en question, il est préférable de réduire la sensibilité du laser pour pouvoir frapper plus fort, plutôt que l'inverse. La force d'impact joue donc un rôle plus important que celui la sensibilité. Le fait que les fréquences propres soient proches pour les deux impacts signifie que la poutre s'est comporté comme un matériau linéaire.

VII.6.Conclusion

Grâce à tous ces essais, il a été déterminé que pour tester les poutres composites fabriquées dans le cadre de ce projet il était plus intéressant d'utiliser l'embout en acier inoxydable, d'impacter les poutres proche de l'encastrement avec une force d'impact suffisamment grande pour bien exciter les hautes fréquences. Pour y parvenir, il faut régler la sensibilité du vibromètre laser à $50\ \frac{mm\ s}{V}$.

ANNEXE VIII.Rotation des repères d'un stratifié

Pour un composite à section creuse rectangulaire l'hypothèse est faite que chacune des quatre parois est un stratifié simple afin de pouvoir incorporer la théorie des stratifiés dans le code. Les deux parois verticales sont donc des stratifiés ayant subi 90 degrés de rotation autour de l'axe longitudinal « x ». Il est nécessaire d'obtenir leurs matrices de rigidité dans le repère de la poutre à partir du repère local classique d'un stratifié afin de pouvoir réaliser les calculs.

Il faut tout d'abord définir la relation entre le repère local et le repère global. Le repère local est définit par le triplet « x',y',z' », où les vecteurs unitaires sont définis par « i',j',k' », tandis que le repère de la poutre est définit par le triplet « x,y,z », où les vecteurs unitaires sont définis par « i,j,k ». Dans l'exemple suivant on suppose une rotation autour de l'axe de la poutre (l'axe des « x ») de 90° dans le sens positif anti-horaire illustrée par la figure ci-dessous :

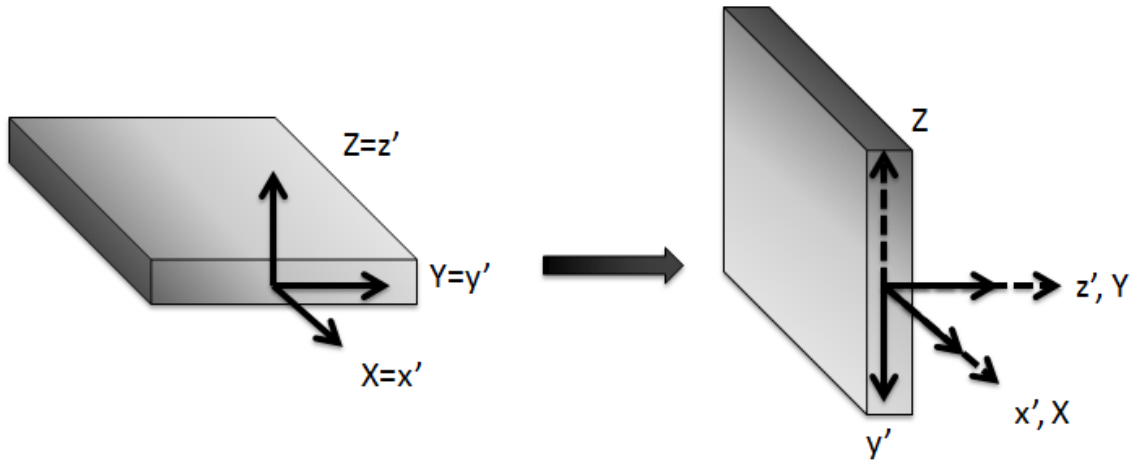


Figure viii- 1: Repères locaux d'un stratifié horizontal et d'un stratifié vertical par rapport aux axes globaux de la poutre.

Cette figure illustre le fait que les propriétés de la paroi verticale dans le repère global de la poutre peuvent être dérivées à partir des propriétés d'une paroi horizontale.

Il faut obtenir la matrice de souplesse dans le repère global à partir de la matrice de souplesse dans le repère local.

$$[\epsilon]_{x',y',z'} = [S]_{x',y',z'} . [\sigma]_{x',y',z'} \rightarrow [\epsilon]_{X,Y,Z} = [S]_{X,Y,Z} . [\sigma]_{X,Y,Z}$$

$$[\nu]_{x',y',z'} = [\nu]_{X,Y,Z}$$

Les composantes de ces matrices sont utilisées dans les théories des poutres, ainsi que dans l'expression de l'énergie potentielle.

L'illustration ci-dessus se traduit en équation de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{bmatrix}$$

Il est nécessaire d'obtenir les tenseurs de changement de repère des contraintes et des déformations autour de l'axe « x » qui seront multipliés avec la matrice de souplesse dans le repère local pour obtenir la matrice de souplesse dans le repère global de la poutre. Les relations de rotation des contraintes et de déformation autour de l'axe « z » sont les suivantes :

où,
$$[\boldsymbol{T_\epsilon}] = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ sin^2(\theta) & cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{T_\sigma}] = \begin{bmatrix} cos^2(\theta) & sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ sin^2(\theta) & cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & cos^2(\theta) - sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

tel que :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{final} = [\boldsymbol{T_\sigma}] . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{initial} \Leftrightarrow [\sigma]_{final} = [\boldsymbol{T_\sigma}][\sigma]_{initial}$$

viii. 1

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{final} = [\boldsymbol{T_\epsilon}] . \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{initial} \Leftrightarrow [\epsilon]_{final} = [\boldsymbol{T_\epsilon}][\epsilon]_{initial}$$

Les vecteurs $[\sigma]$ et $[\epsilon]$ sont définis de manière à posséder la séquence d'indices spécifique tel les vecteurs ci-dessus.

Il faut obtenir les relations tensorielles entre le repère local de la paroi verticale et le repère global ci-après :

$$[\sigma]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\sigma bis}}\right].[\sigma]_{x',y',z'}$$
$$[\epsilon]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right].[\epsilon]_{x',y',z'} \qquad \text{viii. 2}$$

Où les matrices $\left[\boldsymbol{T_{\sigma bis}}\right]$ et $\left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right]$ sont calculés grâce aux matrices $[\boldsymbol{T_{\sigma}}]$ et $[\boldsymbol{T_{\epsilon}}]$ respectivement, mais sont pas égales. Leur expression exacte est dérivée grâce aux développements qui suivent.

Il faut commencer par obtenir les tenseurs de rotation autour de l'axe « x » à partir des tenseurs précédents. Pour ce faire, il faut remplacer les symboles de la manière suivante :

$$z \rightarrow x$$
$$x \rightarrow y \qquad \text{viii. 3}$$
$$y \rightarrow z$$

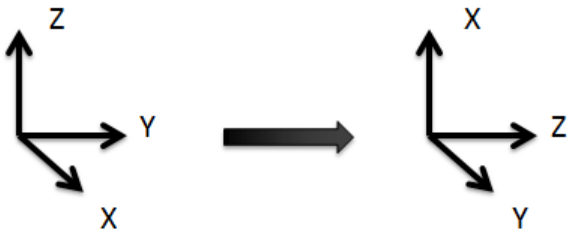


Figure viii- 2 : Transformation des indices du repère pour effectuer la rotation autour de l'axe « x »

De cette manière on obtient les relations de rotation autour de l'axe « x » :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{T_{\sigma}}]\begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}_{x',y',z'} \qquad \text{viii. 4}$$

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \epsilon_{xx}\\ \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy}\\ \epsilon_{yz}\end{bmatrix}_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{T_\epsilon}]\begin{bmatrix}\epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \epsilon_{xx}\\ \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy}\\ \epsilon_{yz}\end{bmatrix}_{x',y',z'}$$

Cependant, ces vecteurs de contraintes et de déformations ne possèdent pas la bonne séquence d'indice. Il faut donc les transformer avec un autre tenseur pour obtenir la bonne séquence :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]\begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}[\sigma]$$

$$\begin{bmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = [\boldsymbol{T_{seq}}]\begin{bmatrix}\epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \epsilon_{xx}\\ \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy}\\ \epsilon_{yz}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\epsilon_{yy}\\ \epsilon_{zz}\\ \epsilon_{xx}\\ \epsilon_{xz}\\ \epsilon_{xy}\\ \epsilon_{yz}\end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}[\epsilon] \qquad \text{viii. 5}$$

Où

$$\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{viii. 6}$$

Il est désormais possible d'obtenir les tenseurs de transformation des repères en ayant la bonne séquence dans les composantes des vecteurs de contrainte et de déformation. Les points de départs sont les relations de rotation des repères autour de l'axe « x » :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{T_\sigma}].\begin{bmatrix}\sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xx}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}_{x',y',z'} \Leftrightarrow \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{T_\sigma}]\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}_{x',y',z'} \qquad \text{viii. 7}$$

$$\Leftrightarrow \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}[\sigma]_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{T_{\sigma}}]\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-1}[\sigma]_{x',y',z'} \Leftrightarrow [\sigma]_{X,Y,Z}$$

$$= \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right][\boldsymbol{T_{\sigma}}]\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-\mathbf{1}}[\sigma]_{x',y',z'}$$

$$\Leftrightarrow [\sigma]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\sigma bis}}\right][\sigma]_{x',y',z'}$$

Où, $$\left[\boldsymbol{T_{\sigma bis}}\right] = \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right][\boldsymbol{T_{\sigma}}]\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-\mathbf{1}} \quad \text{viii. 8}$$

$$[\sigma]_{x',y',z'} = \left[\boldsymbol{T}_{\sigma \boldsymbol{bis}}\right]^{-\mathbf{1}}[\sigma]_{X,Y,Z} \quad \text{viii. 9}$$

De plus, $$[\epsilon]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\epsilon]_{x',y',z'} \quad \text{viii. 10}$$

Où, $$\left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right] = \left[\boldsymbol{T_{seq}}\right][\boldsymbol{T_{\epsilon}}]\left[\boldsymbol{T_{seq}}\right]^{-\mathbf{1}} \quad \text{viii. 11}$$

$$[\epsilon]_{x',y',z'} = \left[\boldsymbol{T}_{\epsilon \boldsymbol{bis}}\right]^{-\mathbf{1}}[\epsilon]_{X,Y,Z}$$

Pour finir on en déduit la matrice de rigidité d'une couche verticale dans les axes de la poutre sous la même forme que les couches horizontales.

$$[\epsilon]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{\epsilon}]_{x',y',z'} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{S}]_{\boldsymbol{x',y',z'}}.[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{x',y',z'}}$$

$$= \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{S}]_{\boldsymbol{x',y',z'}}\left[\boldsymbol{T}_{\sigma \boldsymbol{bis}}\right]^{-\mathbf{1}}[\sigma]_{X,Y,Z}$$

$$\Leftrightarrow [\epsilon]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{S}]_{\boldsymbol{x',y',z'}}\left[\boldsymbol{T}_{\sigma \boldsymbol{bis}}\right]^{-\mathbf{1}}[\sigma]_{X,Y,Z} \quad \text{viii. 12}$$

$$\Leftrightarrow [\epsilon]_{X,Y,Z} = [\boldsymbol{S}]_{X,Y,Z}[\sigma]_{X,Y,Z}$$

Avec, $$[\boldsymbol{S}]_{X,Y,Z} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon bis}}\right][\boldsymbol{S}]_{\boldsymbol{x',y',z'}}\left[\boldsymbol{T}_{\sigma \boldsymbol{bis}}\right]^{-\mathbf{1}} \quad \text{viii. 13}$$

En reprenant le cas des couches composites dans le chapitre 3 les matrices peuvent se simplifier. Pour une rotation positive de 90 degrés autour de l'axe « x » les matrices de rotation deviennent :

$$[\boldsymbol{T_{\epsilon}}]_{\mathbf{90^\circ}} = [\boldsymbol{T_{\sigma}}]_{\mathbf{90^\circ}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{viii. 14}$$

Et donc,

$$\left[\boldsymbol{T_{\epsilon_{bis}}}\right]_{\mathbf{90^\circ}} = \left[\boldsymbol{T_{\sigma_{bis}}}\right]_{\mathbf{90^\circ}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \text{viii. 15}$$

Il est donc maintenant possible d'en déduire les matrices de souplesses des parois verticales dans le repère global de la poutre pour des couches présentant des orientations $0°/90°$ et $\pm 45°$ respectivement. En reprenant les expressions des matrices de souplesse viii. 11 et viii. 13 les équations donnent les résultats suivants :

$$[\boldsymbol{S}]_{0°\backslash 90°_{\boldsymbol{vertic}}} = \left[\boldsymbol{T_{\epsilon_{bis}}}\right]_{\mathbf{90^\circ}} [\boldsymbol{S}]_{0°\backslash 90°_{\boldsymbol{horiz}}} \left[\boldsymbol{T_{\sigma_{bis}}}\right]_{\mathbf{90^\circ}}^{\mathbf{-1}}$$

$$[\boldsymbol{S}]_{0°\backslash 90°_{\boldsymbol{vertic}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{1,1}} & \boldsymbol{S_{1,3}} & \boldsymbol{S_{1,2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S_{1,3}} & \boldsymbol{S_{3,3}} & \boldsymbol{S_{1,3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S_{1,2}} & \boldsymbol{S_{1,3}} & \boldsymbol{S_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{S_{4,4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{S_{6,6}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{S_{4,4}} \end{bmatrix} \qquad \text{viii. 16}$$

Plusieurs changements sont mis en évidence. $S_{1,3}$ et $S_{1,2}$ ont échangé leurs positions. Les paires $S_{2,2}$ et $S_{3,3}$ ainsi que $S_{6,6}$ et $S_{5,5}$ ont fait de même. Une manière de se convaincre que ce résultat est correct est de s'imaginer une force F selon l'axe « z » pour une couche horizontale et puis pour une couche verticales.

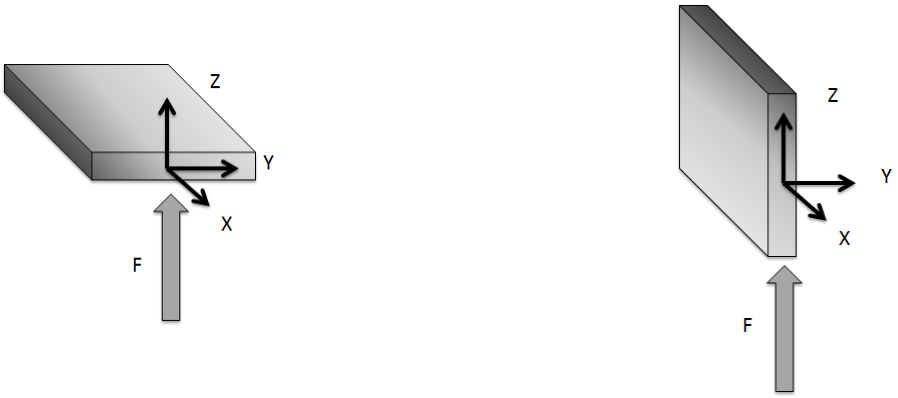


Figure viii- 3 : Forces selon « z » pour une couche horizontale et verticale respectivement

Dans le premier cas $S_{xz} = S_{4,4}$ qui est fonction du module de cisaillement hors plan, tandis que dans le cas suivant $S_{xz} = S_{6,6}$ est fonction du module de cisaillement dans le plan. Les transformations subies par la rotation autour de l'axe « x » est similaire pour les couches formant $\pm 45°$ avec l'axe « x » :

$$[\boldsymbol{S}]_{\pm 45 \boldsymbol{vertic}} = \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\epsilon bis}}\right]_{\boldsymbol{90°}} [\boldsymbol{S}]_{\pm 45 \boldsymbol{horiz}} \left[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma bis}}\right]_{\boldsymbol{90°}}^{\boldsymbol{-1}}$$

$$[\boldsymbol{S}]_{\pm 45 \boldsymbol{vertic}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{3,3} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} - \frac{S_{6,6}}{2}\right) & S_{1,3} & \frac{1}{2}\left(S_{1,1} + S_{1,2} + \frac{S_{6,6}}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{1,1} - S_{1,2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{bmatrix} \quad \text{viii. 17}$$

Il est intéressant de remarquer que même suite à une rotation des repère autour de l'axe longitudinal, les matrices de souplesse gardent à nouveau la forme de matrice de souplesse de matériaux orthotropes.

ANNEXE IX. Calcul du facteur de forme

Cette annexe a pour objectif de mettre en évidence certains aspects du calcul du facteur de forme. Le facteur de forme est un coefficient qui corrige l'influence de l'énergie de cisaillement dans l'expressions de l'énergie potentielle et est représenté par le symbole k'. Le facteur de forme intervient à deux endroits différents. Le premier est dans le calcul du coefficient adimensionnel $\gamma *$ qui entre en jeux lors du calcul des nombres d'ondes et des fonctions modales de Timoshenko et le deuxième dans le calcul de l'énergie potentielle dans les intégrales par partie.

Plusieurs expressions du facteur de forme sont données dans la littérature et dépendent de la forme géométrique de la section, mais également du coefficient de Poisson. Dans le cas d'un matériau isotrope le coefficient de Poisson est représenté par ν.

Deux expressions sont utilisées dans le cadre de cette recherche, l'une pour des sections pleines rectangulaires et l'autre pour des sections creuses à parois minces rectangulaires. Le facteur de forme pour les sections pleines rectangulaire vaut (Han et al., 1999) :

$$k'_{pleine} = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \qquad \text{ix. 1}$$

Et le facteur de forme pour les sections creuses rectangulaires vaut (Han et al., 1999) :

$$k'_{creuse} = \frac{20(1+\nu)}{48+39\nu} \qquad \text{ix. 2}$$

Dans le processus de validation du code, des sections creuses rectangulaires avec un matériau isotrope est utilisé. Dans ce cas-là le facteur k'_{pleine} est utilisé. Pour de l'aluminium ce dernier vaut :

$$k'_{creuse_{alum}} \approx 0.436 \qquad \text{ix. 3}$$

Cette valeur est utilisée pour le calcul des fonctions modales des nombres d'ondes de la théorie de Timoshenko. Dans le code cependant, le calcul de l'énergie potentielle se fait par partie et il est nécessaire de séparer la section creuse en 4 parois d'Euler-Bernoulli :

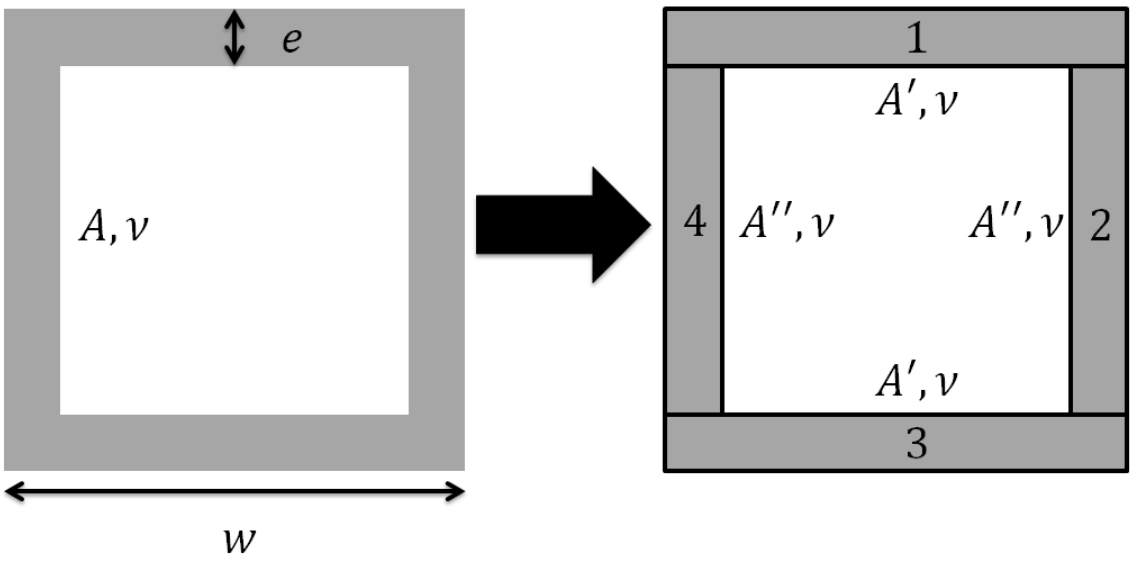


Figure ix- 1: Décomposition de la section creuse en quatre parois

Où chaque paroi est désormais une section rectangulaire pleine dont le facteur de forme vaut :

$$k'_{pleine_{alum}} \approx 0.850 \qquad \text{ix. 4}$$

La moyenne pondérée des facteurs de forme en fonction de la portion de l'aire que les parois occupent est donnée par l'expression suivante :

$$k'_{pleine_{alum_{moyenne}}} = \frac{2A'k'_{pleine_{alum}} + 2A''k'_{pleine_{alum}}}{A}$$

$$= \frac{(2A' + 2A'')k'_{pleine_{alum}}}{A} \qquad \text{ix. 5}$$

$$= \frac{(2A' + 2A'')k'_{pleine_{alum}}}{A} = \frac{Ak'_{pleine_{alum}}}{A} = k'_{pleine_{alum}}$$

Mais, $$k'_{pleine_{alum_{moyenne}}} \neq k'_{creuse_{alum}} \qquad \text{ix. 6}$$

Il est donc difficile de savoir quelle valeur utiliser dans l'expression de l'énergie potentielle. Cependant, sachant que l'expression du facteur de forme dépend de la forme de la section au complet et est une constante calculée avant d'être injectée dans les intégrales par partie de l'énergie potentielle, c'est l'expression pour une section creuse qui doit être utilisée, bien que les intégrales par partie traitent des parois une par une.

Ce problème est encore plus difficile à résoudre pour des matériaux orthotropes tels que les matériaux composites. En effet, les expressions présentées ne donnent pas d'indication pour savoir si ν est en réalité ν_{xz}, ν_{xy} ou autre. Il faut se référer au travail de (Bank, 1987) pour obtenir ne expression adéquate pour le facteur de forme. Dans le cas particulier où la section creuse rectangulaire est composée de 4 panneaux avec des propriétés de matériaux identiques, mais avec des épaisseurs différentes, est illustré par la figure ci-dessous :

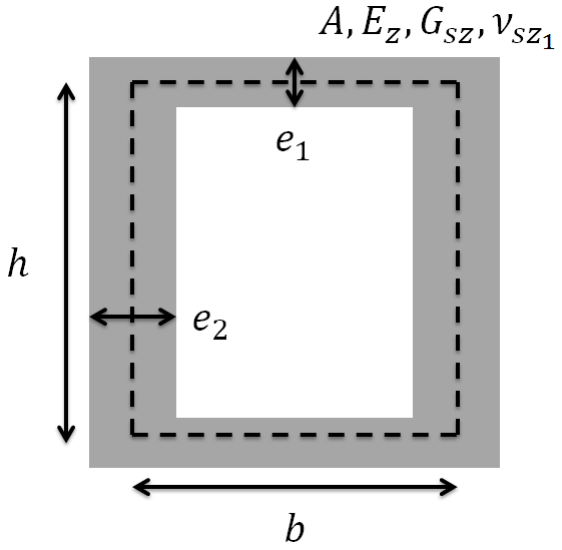


Figure ix- 2 : Illustration des données nécessaires au calcul du facteur de forme selon (Bank, 1987)

Où s est l'axe dans le plan en coordonnées curvilignes. Dans la figure ci-dessus il peut s'agir de l'axe des « x » ou de l'axe des « y » de telle sorte le coefficient de Poisson et le module de cisaillement soit toujours celui dans le plan

Le facteur de forme prend la forme suivante (Bank, 1987) :

$$k'_{creuse} = \frac{20(1+3m)^2}{A - \frac{\nu_{xy}G_{xy}}{E_x}B} \qquad \text{ix. 7}$$

Où $A = 180m^3 + 300m^2 + 144m + 60m^2n^2 + 60mn^2 + 24$ $n = \frac{b}{h}$ ix. 8

$$B = -30m^2 + 50mn^2 + 30m^2n^2 - 6m + 4 \qquad m = \frac{e_1}{e_2}\frac{b}{h}$$

Dans le cas particulier où $e_1 = e_2$ et $b = h$ cette expression se simplifie d'Euler-Bernoulli :

$$k'_{creuse} = \frac{20}{48 - 3\frac{\nu_{xy} G_{xy}}{E_x}} \qquad \text{ix. 9}$$

Pour un matériau isotrope :

$$E_x = E, G_{xy} = G \; et \; \nu_{xy} = \nu \qquad \text{ix. 10}$$

Et avec, $$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k'_{creuse} = \frac{20}{48 - 3\frac{\nu\, G}{E}} = \frac{20}{48 - 3\frac{\nu}{2(1+\nu)}} \qquad \text{ix. 11}$$

$$= \frac{40(1+\nu)}{96(1+\nu) - 3\nu} = \frac{40(1+\nu)}{96 + 93\nu} = \frac{40(1+\nu)}{3(32 + 31\nu)}$$

Cette expression est différente de celle donnée par (Han et al., 1999), mais c'est cette dernière qui est utilisée puisque l'expression que (Han et al., 1999) ont repris les résultats de Cowper. Mais les travaux de (Bank, 1987) se basent sur les résultats de Cowper et les améliorent.

ANNEXE X. Faiblesses de Maple

Bien que le code ait été construit sur le logiciel, l'auteur a été plus d'une fois très déçu de celui-ci à cause de ses fonctionnalités. L'auteur recommande à la personne qui va reprendre le code à songer très sérieusement à le traduire dans le logiciel MATLAB. Voici quelques faiblesses et problèmes qui apparaissent dans Maple :

- Maple laisse trop de liberté syntaxique. En effet, l'utilisateur a le choix d'utiliser une multitude de symboles et d'indices pour définir des variables ou même créer des fonctions. Ceci est très visuel, mais peut mener à des erreurs très difficiles à déceler. Il est donc conseillé d'utiliser le moins de symboles possibles.
- Les messages d'erreurs n'aident absolument pas à trouver la solution. En effet, contrairement à MATLAB, les messages d'erreurs sont rarement utiles et ne donnent pas d'indices quant à la position de l'erreur, ni quant à sa nature.
- La fonctionnalité d'édition de texte de base « Rechercher » ne fonctionne pas pour les blocs d'exécution du code. En conséquence, il est très difficile de trouver toutes les instances d'une variable dans le code.
- La fonctionnalité d'édition de texte de base « Rechercher/remplacer » ne fonctionne pas pour les blocs d'exécution du code. En conséquence, s'il faut changer le nom d'une variable, il faut le faire manuellement dans tout le document.
- Les déclarations et les définitions des procédures appelées dans le code doivent se faire dans une feuille de code séparée qui sauve à la fin toutes les procédures dans un script. Ce script doit être lu au début par le code principal. Ceci a trois conséquences :
    - Chaque modification des procédures entraine une réécriture du script, qui représente un processus lourd
    - Pour ne pas insérer dans le code principal un nombre très élevé de lignes de lectures de script pour chaque procédure individuelle, les procédures ont été regroupées dans quelques scripts séparés. Cela entraine de très grandes commandes de sauvegarde des procédures à la fin des codes séparés.
    - Les fichiers contenant les définitions des procédures sont très difficiles à lire.

Une fois le code final prêt il était désiré de définir une nouvelle procédure exécutant le code dans son entièreté, afin de réaliser l'étude paramétrique. Cette idée a été abandonnée, parce que pour créer une procédure il était nécessaire d'avoir le code en entier dans un seul bloc d'exécution et la fonctionnalité de maple pour fusionner les blocs d'exécutions ne semble pas fonctionner. Un essai a été réalisé en transférant code entier sur Microsoft Word et en traitant le texte, mais plusieurs problèmes sont apparus.

ANNEXE XI. Détails Chapitre 5

XI.1. Détails sur courbes d'impacts théoriques

Dans les calculs théoriques, il n'est pas nécessaire de connaître le type d'embout utilisé sur le marteau instrumenté du moment que la courbe d'impact est fournie au modèle. Dans le cadre de ce projet deux catégories d'impacts sont étudiées. La première catégorie utilise une fonction de Dirac temporelle pour laquelle les impacts sont instantanés et infiniment courts. La deuxième catégorie utilise des fonctions continues temporelles. Cependant, les deux catégories utilisent une fonction de Dirac spatiale. Les impacts fournis au modèle informatique sont donc ponctuels.

XI.1.1. Impact avec Dirac temporel

L'expression de l'impact avec une fonction de Dirac temporelle prend la forme suivante :

$$f(x,t) = A * \delta(x - x_0) * \delta(t - t_0) \qquad \text{xi. 1}$$

Où A représente l'amplitude de l'impact, x_0 la position de l'impact et t_0 le moment de l'impact. L'avantage de cette expression est qu'elle est valable pour le domaine temporel en entier $t \in [-\infty, +\infty]$. Cependant, cette expression, bien que correcte mathématiquement, n'est pas traitée correctement dans le logiciel et ne génère pas de résultats corrects pour une raison non-identifiée.

XI.1.2. Impact avec fonctions continues temporelles

Dans cette catégorie, trois possibilités ont été identifiées pour générer des courbes d'impacts. Il est possible d'approcher une courbe d'impact expérimentale soit avec un sinus d'une seule période, soit avec des séries de Fourrier ou même avec des fonctions Gaussiennes. Le lissage par séries de Fourrier et par des fonctions Gaussiennes ont été générées grâce à l'outil « cftool » de MATLAB.

L'expression de la force d'impact peut être généralisée de la manière suivante :

$$f(x,t) = A * \delta(x - x_0) * f_t(t) \qquad \text{xi. 2}$$

Où $f_t(t)$ représente la partie temporelle de l'impact. La partie temporelle est représentée par une fonction en trois morceaux, pour qu'elle soit définie de $t \in [-\infty, +\infty]$. Elle vaut 0 avant l'impact et 0 après l'impact.

XI.1.2.1. Impact avec sinus d'une période

Le lissage par un sinus est la plus simple à réaliser. Son expression est la suivante :

$$f_t(t) = A * \left(1 - \cos\left(\frac{2 * \pi}{B} * t\right)\right) \; avec \; t \in \left[t_{début\ impact}, t_{fin\ impact}\right] \qquad \text{xi. 3}$$

Où A est l'amplitude de l'impact et B est la durée de l'impact. Ces deux paramètres peuvent prendre des valeurs arbitraires et peuvent être facilement ajustés.

XI.1.2.2. Impact avec séries de Fourrier

L'expression générale d'une série Fourrier est la suivante :

$$f_t(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_f} (a_i * \cos(i * \omega * t) + b_i * \sin(i * \omega * t)) \qquad \text{xi. 4}$$

$$avec \; t \in \left[t_{début\ impact}, t_{fin\ impact}\right]$$

Où n_f est l'ordre de la série. En théorie, au plus n_f est grand au plus le lissage s'approche de la courbe expérimentale. Dans le cas d'une courbe d'impact relativement régulière le résultat converge assez rapidement. Les figures ci-dessous illustrent plusieurs lissages effectuées grâce à la fonction « cftool » de Matlab sur une courbe d'impact générée avec l'embout noir.

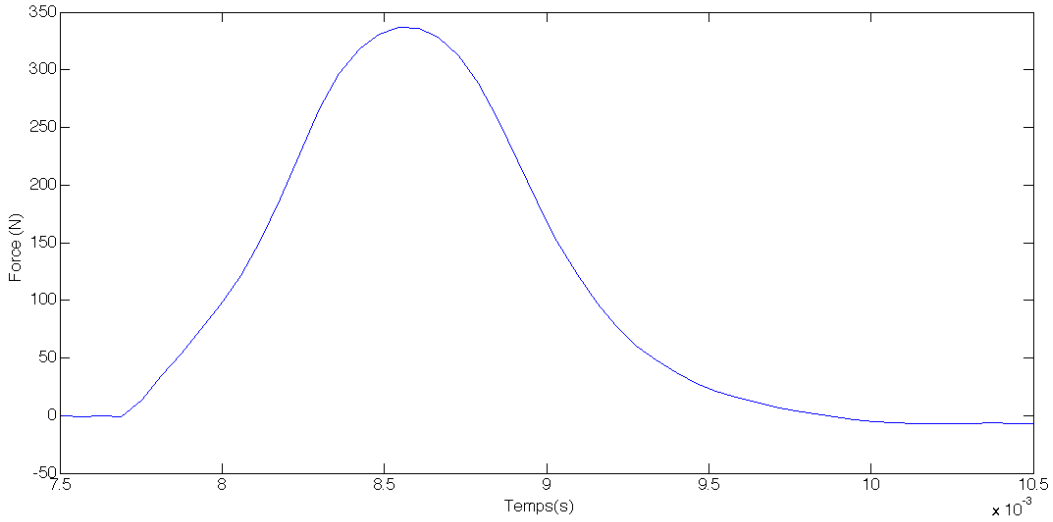


Figure xi- 1 : Courbe d'impact avec embout noir à approcher

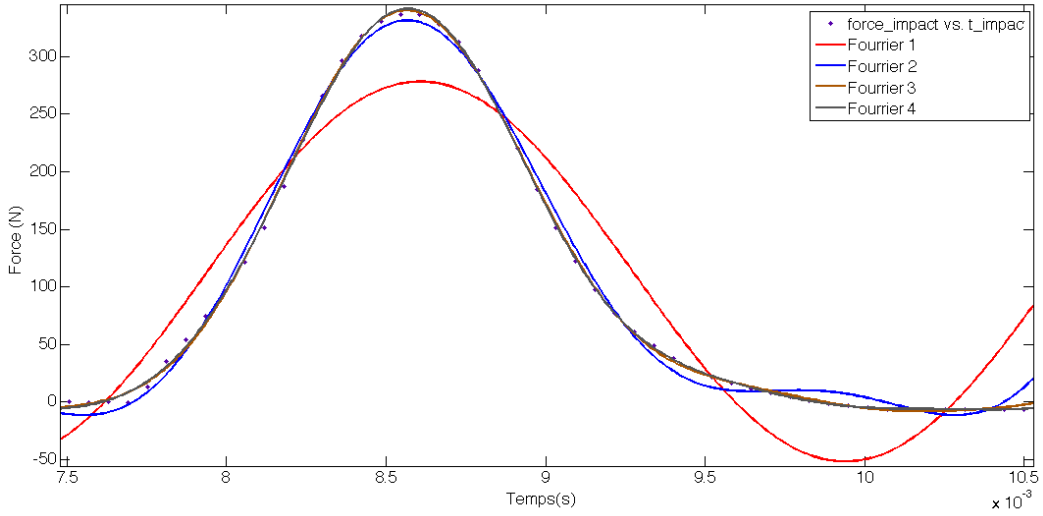


Figure xi- 2 : Lissage de la courbe d'impact avec l'embout noir avec des séries de Fourrier

Les séries de Fourrier semblent bien converger à partir de l'ordre 3. Les résultats sont satisfaisants, cependant, la pente brusque au début de l'impact est plus difficile à capturer et nécessite un ordre encore plus élevé.

Les courbes lissées doivent être traitées, afin de ne garder que la partie positive de la courbe qui décrit l'impact. Le traitement de la courbe d'ordre 4 est effectué sous Maple et donne le résultat suivant :

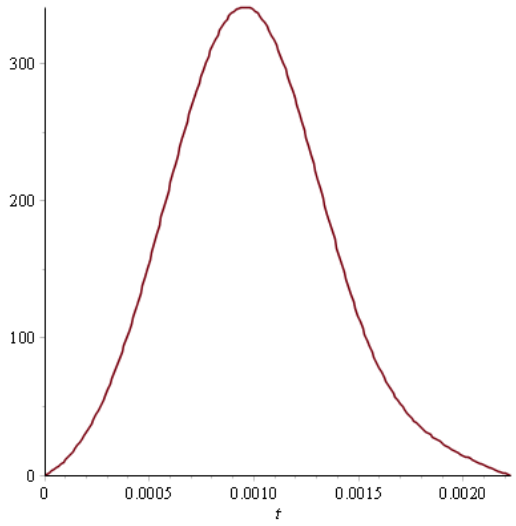


Figure xi- 3 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout noir

Les figures qui suivent sont générées à partir du plus fort impact réalisé avec l'embout en acier inoxydable. Comme expliqué précédemment, lorsque l'embout métallique impacte la structure, des ondulations apparaissent avant et après impact. Il est clair que celles-ci ne représentent pas une force de contact réelle puisqu'elles persistent pendant un temps trop long par rapport à la durée du grand pic. Les ondulations sont tout simplement mises à zéro avec un prétraitement du signal. L'hypothèse est faite que les ondulations n'apparaissent pas dans le grand pic d'impact.

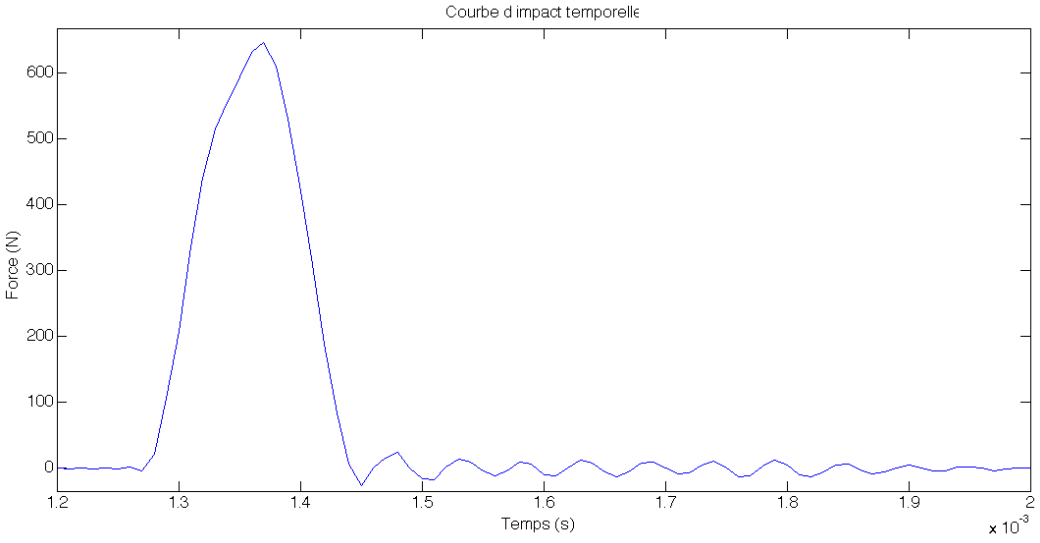


Figure xi- 4 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable

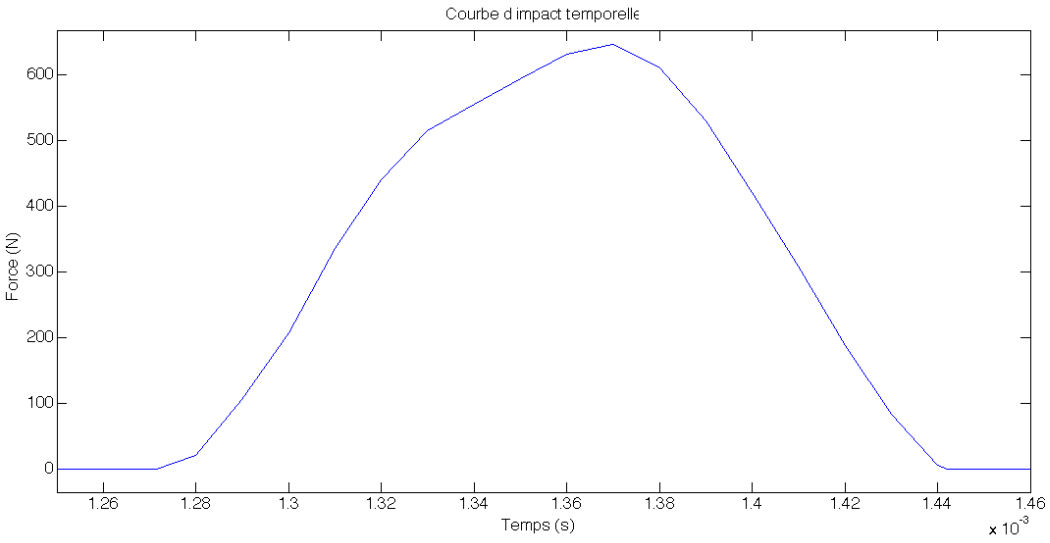


Figure xi- 5 : Courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable traitée à lisser

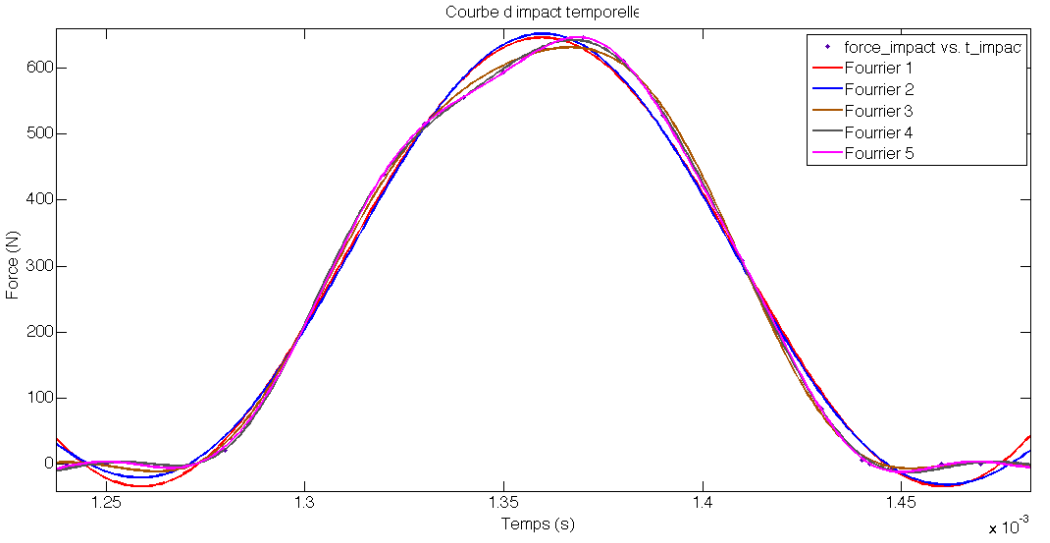


Figure xi- 6 : Lissages de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable lissée grâce à des séries de Fourrier

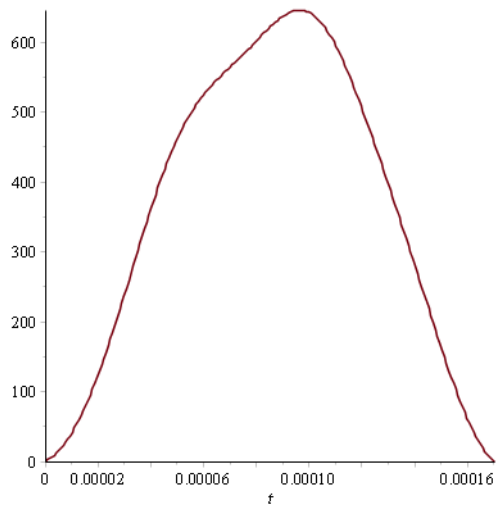


Figure xi- 7 : Lissage retenue de la courbe d'impact avec l'embout en acier inoxydable grâce à une série de Fourrier

La méthode d'lissage marche tout aussi bien pour un impact avec un embout mou qu'avec un embout dur.

XI.1.3. Manière d'utiliser les techniques de lissage

Les paragraphes précédents illustrent plusieurs techniques pour générer des courbes d'impacts à fournir dans le modèle informatique. Cependant, chacune a des avantages et des inconvénients. Produire des courbes d'impacts théoriques grâce à une seule période de sinus requiert moins de temps qu'avec les séries de Fourrier. Il est donc judicieux de savoir quand utiliser chaque méthode.

Lorsque le but de l'opération est d'obtenir un mouvement approximatif d'une poutre, utiliser un sinus d'une période suffit. Cela évite de passer par les étapes de traitement du signal et d'lissage. Il est possible d'ajuster l'amplitude de l'impact, ainsi que sa durée très facilement en étirant spatialement la fonction.

$$f(t)\ avec\ \ t \in [0, t_1] \rightarrow f\left(\frac{t}{T}\right)\ avec\ t \in [0, t_1 * T] \qquad \text{xi. 5}$$

Lorsqu'une plus grande précision est demandée, il est judicieux de choisir une courbe d'impact expérimentale qui servira de référence, la traiter et la lisser une seule fois et ensuite modifier sa durée et son amplitude en pour simuler une multitude d'impacts.

Lorsque la plus grande précision est nécessaire, pour valider un modèle en traçant le mouvement de certains points de la poutre par exemple, il faut réaliser les essais expérimentaux en premier, ensuite récupérer les données sur l'impact et le mouvement de la poutre étudiée et pour finir lisser chacune des courbes d'impacts. Ces courbes d'impacts seront injectées dans le modèle pour simuler le déplacement des points mesurés expérimentalement.

Il ne faut pas oublier que l'incertitude sur le point d'impact, ainsi que l'impact en réalité non ponctuel ont une influence sur les données expérimentales rendant le processus de validation plus compliqué.

XI.2. Répétabilité des essais des trois poutres en composites

Les trois poutres en composites ont été fabriquées à la main en utilisant le même processus. Cependant, il y a beaucoup de facteurs pouvant provoquer de la variabilité dans les spectres des poutres testées. Certains de ces facteurs pourraient être la coupe et le meulage des sections en résine chargée pour l'encastrement, la coupe des composites, leur serrage autour du mandrin etc.

La méthode expérimentale décrite en ANNEXE VII est utilisée pour obtenir les fréquences naturelles expérimentales des trois poutres en composites fabriquées.

Deux essais ont été réalisés avec démontage et remontage sur le banc d'essais pour chaque poutre, afin de confirmer la répétabilité des essais. Le moment de serrage des vis du banc d'essais était de 40 lb.po, soit 4.52 N.m, et la sensibilité du vibromètre laser était réglée à $50\,\frac{mm\,s}{V}$. Dans les paragraphes qui suivent, les résultats des deux essais pour chaque poutre individuelle seront d'abord comparés entre eux. Par la suite, les résultats des trois poutres seront comparés pour déterminer la variabilité par rapport à la fabrication.

Pour chaque poutre, trois figures sont présentées. La première figure trace le contenu fréquentiel entier, la deuxième le contenu fréquentiel dans la gamme $300\ Hz < f < 450\ Hz$ et la troisième figure le contenu fréquentiel dans la gamme $1500\ Hz < f < 5000\ Hz$.

XI.2.1. Poutre 1

Voici les résultats des deux essais de la première poutre:

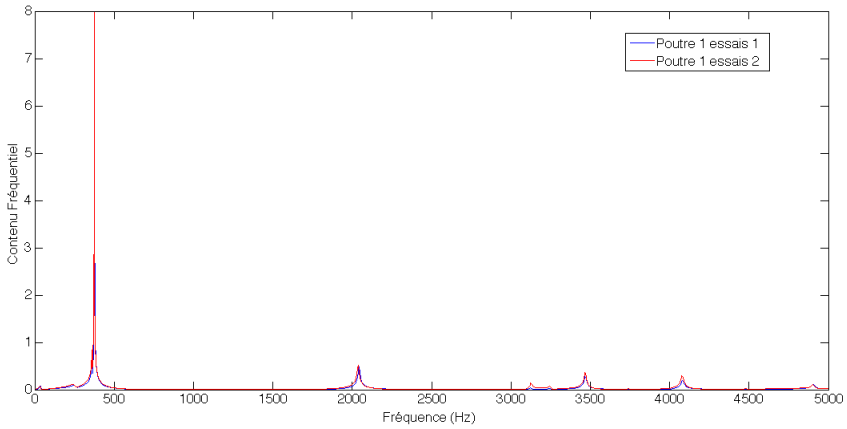


Figure xi- 8 : Contenu fréquentiel de la poutre 1

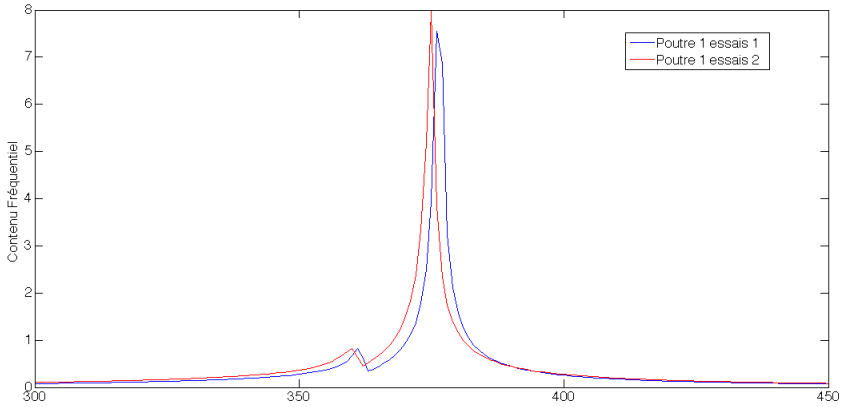


Figure xi- 9 : Agrandissement de la Figure xi- 8

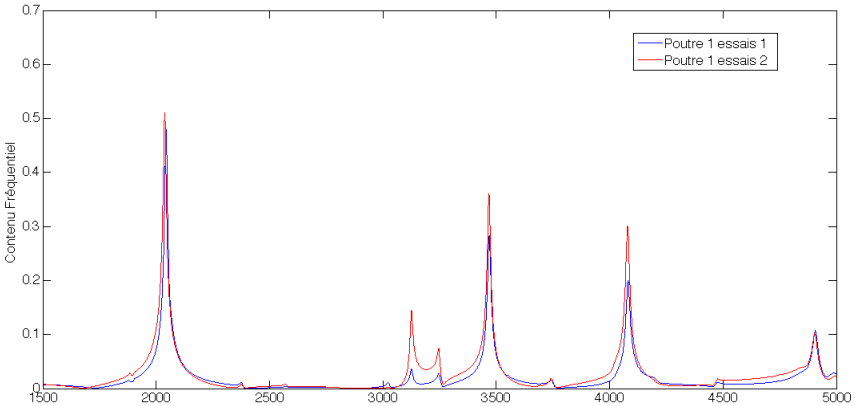


Figure xi- 10 : Agrandissement de la Figure xi- 8

Les deux essais sur la première poutre ne présentent pas de variabilité. En effet, les fréquences propres de la première poutre pour les deux essais sont en accord. Le tableau qui suit résume les valeurs fréquentielles de chaque pic de la Figure xi- 8.

Tableau xi. 1 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 1

Fréquences propres de la poutre 1 [Hz]					
f_1	$[360-361]$	f_4	3126	f_7	$[4079-4081]$
f_2	$[375-376.5]$	f_5	3246	f_8	$[4905-4907]$
f_3	$[2038-2044]$	f_6	$[3468-3469]$		

XI.2.2. Poutre 2

Voici les résultats des deux essais de la deuxième poutre:

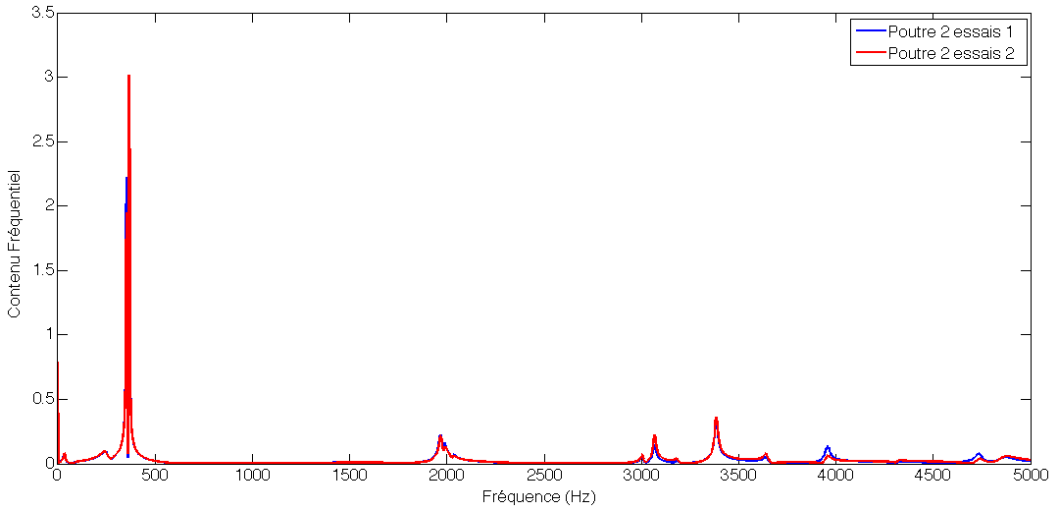


Figure xi- 11 : Spectre fréquentiel de la poutre 2

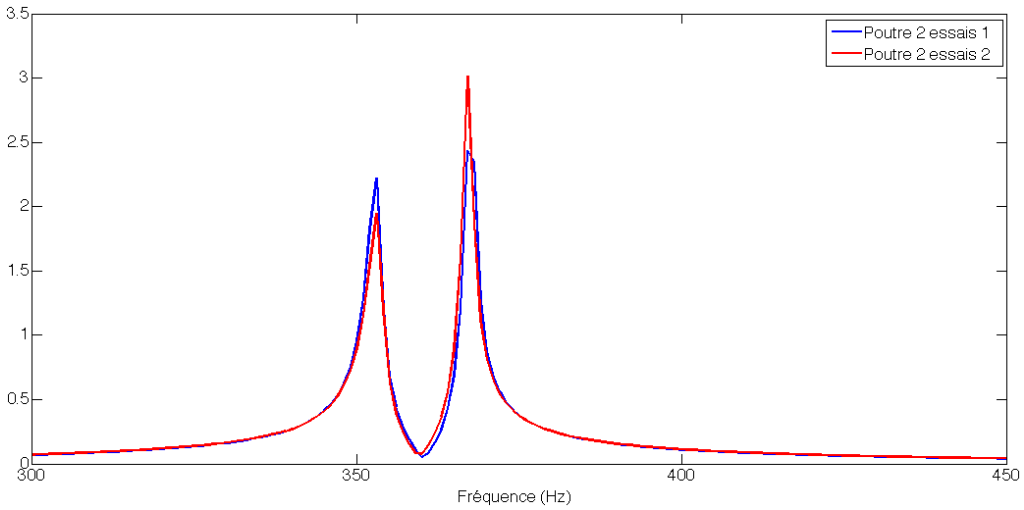


Figure xi- 12 : Agrandissement de la Figure xi- 11

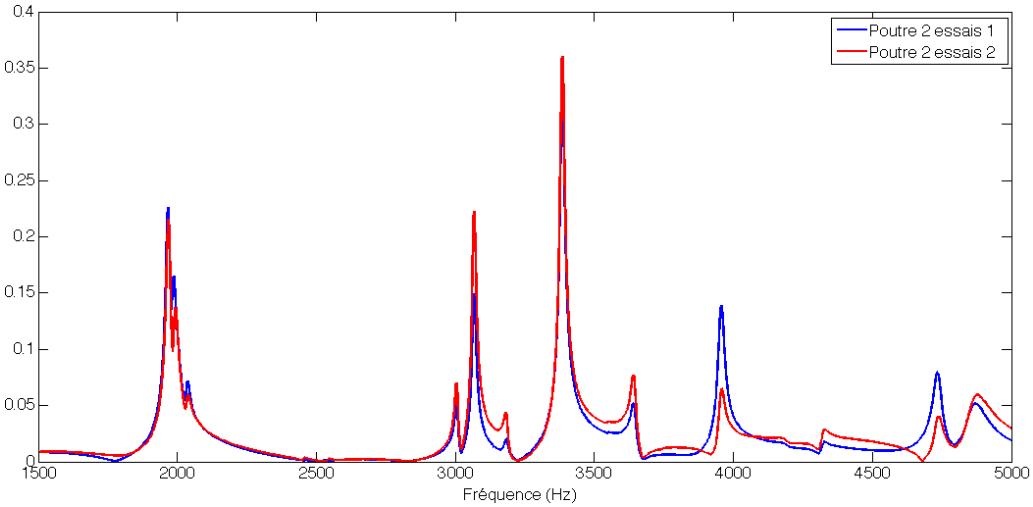


Figure xi- 13 : Agrandissement de la Figure xi- 11

Les essais de la deuxième poutre ne présentent pas de variabilité non plus. Le tableau qui suit résume les valeurs fréquentielles de chaque pic de la Figure xi- 11.

Tableau xi. 2 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 2

Fréquences propres de la poutre 2 [Hz]					
f_1	353	f_5	$[2037 - 2039]$	f_9	3385.5
f_2	$[367 - 367.5]$	f_6	3004	f_{10}	3640
f_3	$[1966.5 - 1968]$	f_7	3067.5	f_{11}	$[3957 - 3958]$
f_4	$[1985 - 1993]$	f_8	$[3181 - 3183]$	f_{12}	$[4734 - 4737]$

XI.2.3. Poutre 3

Voici les résultats des deux essais de la troisième poutre :

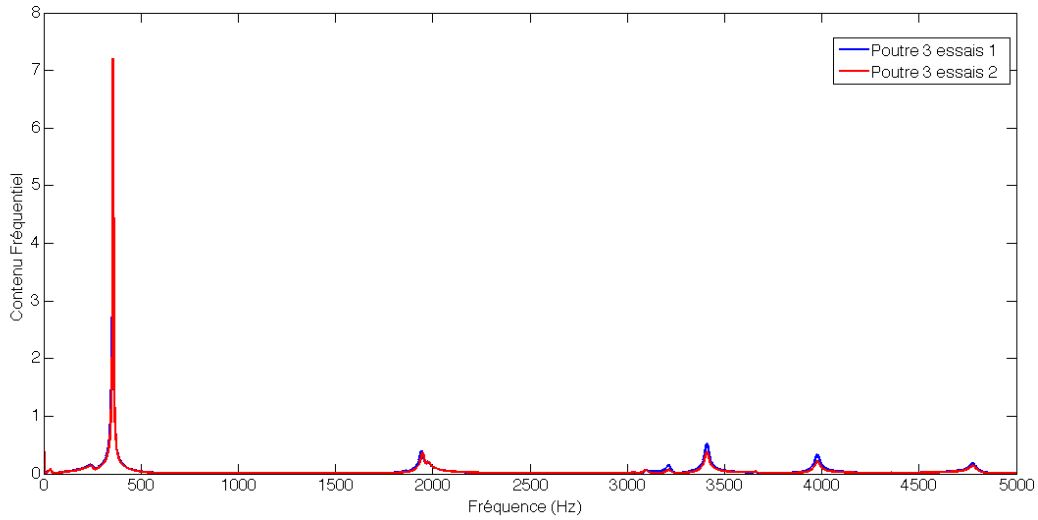


Figure xi- 14 : Spectre fréquentiel de la poutre 3

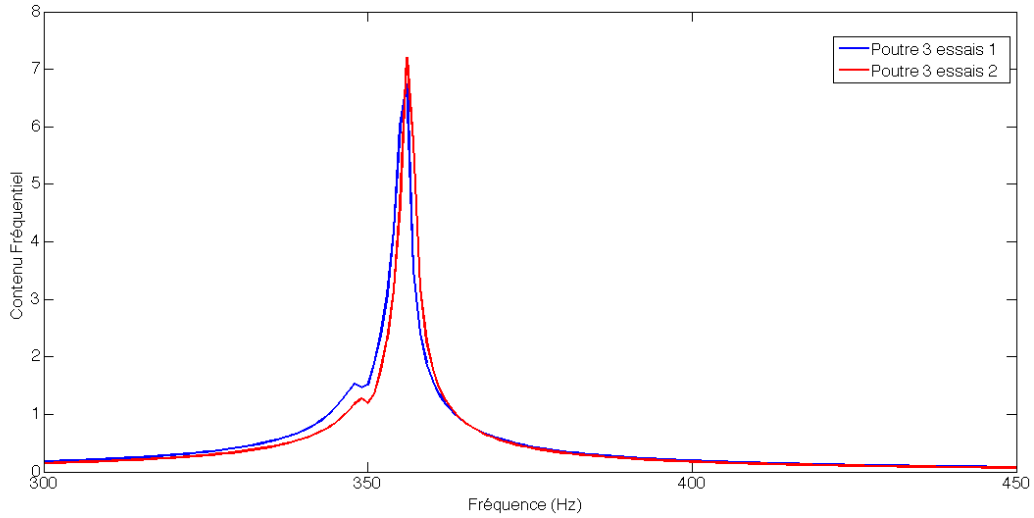


Figure xi- 15 : Agrandissement de la Figure xi- 14

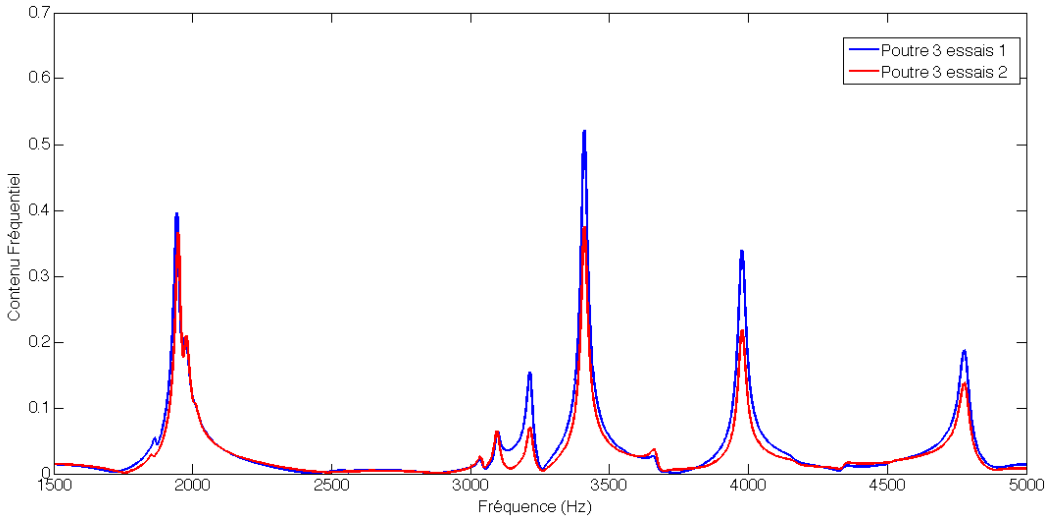


Figure xi- 16 : Agrandissement de la Figure xi- 14

Les essais de la troisième poutre ne présentent pas de variabilité. Le tableau qui suit résume les valeurs fréquentielles de chaque pic de la Figure xi- 14.

Tableau xi. 3 : Fréquences propres expérimentales de la poutre 3

Fréquences propres de la poutre 3 [Hz]					
f_1	$[348-349]$	f_4	$[3095-3097]$	f_7	3977
f_2	$[355.5-356]$	f_5	$[3213-3214]$	f_8	4776
f_3	$[1943-1948]$	f_6	3409		

XI.2.4. Conclusion

Les essais de répétabilité effectués sur les trois poutres en composites sont très satisfaisants. En effet, les fréquences propres obtenues lors des deux essais pour chaque poutre individuelle sont quasiment égales et l'allure des graphiques est quasiment identique. Les légères variations sont principalement attribuées à une légère variabilité sur positionnement relatif des poutres par rapport au banc d'essais.

Certains pics fréquentiels pourraient être éliminés sachant que la poutre est sollicitée principalement en flexion. En effet, les pics correspondants à des vibrations transversales devraient être plus marqués que les pics correspondants à d'autres types de vibration. Cependant, dans la gamme de fréquences de $2000\ Hz$ à $5000\ Hz$ les pics possèdent plus ou moins la même intensité, rendant la distinction visuellement difficile. L'identification des pics des fréquences propres de flexion sera facilitée en comparant les résultats des simulations par ordinateur.